Definición 18.1. *$p \Vdash \varphi$ ssi $\forall G$ $\mathbb{P}$-genérico sobre M, si $p \in G$ entonces $M[G] \models \varphi$.*

Por ejemplo, para ilustrar cómo $\Vdash$ puede ser decidido dentro de M sin ver ningún G:
si φ es lógicamente válida, claramente $p \Vdash \varphi$ para todo p, y no existe ningún p tal que $p \Vdash \neg\varphi$, por la existencia de conjunto genérico.

Hecho 18.2. *Si $p \Vdash \varphi$ y $q \leq p$ entonces $q \Vdash \varphi$.*

DEMOSTRACIÓN Los filtros son cerrados hacia arriba. □
Lo más fuerte es $\mathbb{1} \Vdash \varphi$ (que equivale a todos los $p \Vdash \varphi$). Entonces, por la definición de $\Vdash$, $\vdash \varphi \Rightarrow \mathbb{1} \Vdash \varphi$.
De hecho, $ZFC \vdash \varphi \Rightarrow \mathbb{1} \Vdash \varphi$ (esto no es claro solo a partir de la definición). Se sigue de

$$M[G] \models ZFC.$$

El Lema de la Definibilidad (LD) a grandes rasgos dice que $\Vdash$ es definible en M. $p \Vdash \varphi$ como predicado de dos variables p y φ (en M) **no** puede ser definido en M, por la misma razón que $M \models \varphi$ no es definible en M (Tarski).

Lema 18.3. (Lema de la Definibilidad = LD) *Para toda fórmula $\varphi(x_1 \dots x_n)$ en $\in, =$, el conjunto*

$$\{\langle p, \tau_1, \dots, \tau_n\rangle | p \Vdash \varphi(\tau_1, \dots, \tau_n)\}$$

es definible en M.

Lo que tenemos es una función entre fórmulas

$$\varphi \mapsto Fuerza_\varphi$$

tal que

$$M \models Fuerza_\varphi[p, \tau_1, \dots, \tau_n] \text{ ssi } p \Vdash \varphi(\tau_1, \dots, \tau_n).$$

Lema 18.4. (Lema de la Verdad = LV) *Para toda sentencia φ en $\in, =$,*

$$M[G] \models \varphi \Leftrightarrow \exists p \in G(p \Vdash \varphi).$$

Observe que la dirección $\Leftarrow$ es clara de la definición: $p \in G + p \Vdash \varphi \Rightarrow M[G] \models \varphi$.
La dirección $\Rightarrow$ sí requiere prueba.
Por ahora, usamos LD y LV como cajas negras para demostrar

$$M[G] \models ZFC + \text{ otras cosas.}$$

Ya tenemos: extensionalidad, fundamentación y pares.

Teorema 18.5. $M[G] \models Compr.$

DEMOSTRACIÓN Fije $A \in M[G]$ y una fórmula $\varphi(x)$. Hay que ver que

$$B = \{x \in A | \varphi(x)^{M[G]}\} \in M[G].$$

Suponga que $A = \tau_G$, para algún $\tau \in M^{\mathbb{P}}$. Necesitamos un nombre $\pi \in M^{\mathbb{P}}$ tal que $\pi_G = B$. Sea

$$\pi = \{\langle \sigma, p \rangle \in \text{dom}\tau \times \mathbb{P} | p \Vdash (\sigma \in \tau \wedge \varphi(\sigma))\}.$$

¡El nombre anterior pertenece a M por LD!
Además, funciona por el LV: $\pi_G = B$:

$\pi_G \subset B$: todo elemento de π_G es de la forma σ_G donde para algún $p \in G$, $p \Vdash (\varphi(\sigma) \wedge \sigma \in \tau)$. Por LV (dirección fácil), tenemos $M[G] \models \varphi[\sigma_G] \wedge \sigma_G \in \tau_G = A$. Así, $\sigma_G \in B$.

$B \subset \pi_G$: fije $b \in B$. Entonces $b \in A = \tau_G$, con lo cual $b = \sigma_G$ para algún $\sigma \in \text{dom}\tau$. Pero también tenemos $M[G] \models (\varphi[\sigma_G] \wedge \sigma_G \in \tau_G)$, con lo cual usando la dirección difícil de LV podemos fijar $p \in G$ tal que $p \Vdash (\varphi(\sigma) \wedge \sigma \in \tau)$. Así, $\langle \sigma, p \rangle \in \tau$ y $p \in G$ con lo cual $b = \sigma_G \in \pi_G$.

□

18.1. Axioma de Elección

Teorema 18.6. $M[G] \models AC.$

(Siempre y cuando $M \models AC$. Si $M \not\models AC$, entonces $M[G]$ puede ser o no ser modelo de AC.)
DEMOSTRACIÓN Fije $A \in M[G]$. Tenemos que ver que A puede ser bien ordenado en $M[G]$. Digamos que $A = \tau_G$, $\tau \in M$. En M, usando AC, sea

$$\tau = \{\langle \sigma_\xi, p_\xi \rangle | \xi < \kappa\}.$$

Piense en $\xi \mapsto \sigma_\xi$. Sea entonces

$$\pi = \{\langle \text{pord}(\check{\xi}, \sigma_\xi), \mathbb{1} \langle | \xi < \kappa\}.$$

Claramente, $\pi \in M^{\mathbb{P}}$. En $M[G]$, sea $f = \pi_G$. Entonces

♣ $f = \{\langle \xi, (\sigma_\xi)_G \rangle | \xi < \kappa\}$ es una función,

♣ $\mathrm{dom} f = \kappa$,

♣ OJO: f no tiene por qué ser uno a uno: puede pasar que $(\sigma_\xi)_G = (\sigma_\eta)_G$,

♣ Sin embargo, $\mathrm{im} f \supset \tau_G = A$. Ahora bien, pueden no ser iguales. Sin embargo, recuerde que en ZF podemos probar el siguiente

Lema 18.7. *(ZF) Dados A, f, κ, si $f : \kappa \longrightarrow C$, $A \subset C$, entonces A puede ser bien ordenado.*

Todo esto completa la prueba del teorema. □

18.2. Preservación de cardinales y ccc

Teorema 18.8. *Si $(\mathbb{P}$ es $ccc)^M$, entonces $\forall \alpha < o(M)(\omega_\alpha^M = \omega_\alpha^{M[G]})$.*

Recuerde que habíamos usado $\mathbb{P} = Fn(\omega_5^M, 2)$ para agregar ω_5 reales distintos en $M[G]$, con lo cual lográbamos en $M[G]$ que $2^{\aleph_0} \geq \omega_5^M$... que además resulta, por el teorema anterior, igual a $\omega_5^{M[G]}$ (y ahora sí podremos decir que hemos efectivamente agregado ω_5 reales distintos).
Así,

$$Con(2^{\aleph_0} \geq \aleph_5.$$

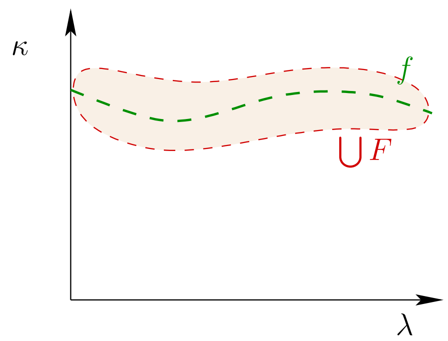
Los forcings ccc preservan cardinales, regularidad, inaccesibilidad débil, ser débilmente Mahlo, etc.
Ojo: ¡en realidad, $(ccc)^M$ es la ccc relevante!
Recuerde que en general, no podemos obtener el resultado sin la ccc: si $\mathbb{P} = Fn(\omega, \omega_1^M)$, entonces $\omega_1^M < \omega_1^{M[G]}$. De hecho, $\omega_1^{M[G]} = \omega_2^M$. Sin embargo, el teorema **no** es una $\Leftrightarrow$: existen órdenes que no son ccc que preservan cardinales.
Lo anterior es equivalente a decir

$$\forall \kappa < o(M)\Big((\kappa \text{ es cardinal})^M \Leftrightarrow (\kappa \text{ es cardinal})^{M[G]}\Big)$$

DEMOSTRACIÓN La dirección $\Leftarrow$ es fácil: basta usar que $M \subset M[G]$. "Cardinal" relativiza hacia abajo (lo mismo que "cardinal inaccesible", etc.): si κ

no es cardinal en M, entonces en M existe $f : \lambda \xrightarrow{sobre} \kappa$ para algún $\lambda < \kappa$. Pero entonces también $f \in M[G]$, y $f : \lambda \xrightarrow{sobre} \kappa$ es absoluto.
La dirección $\Rightarrow$ es más difícil. Suponga, spdg, que $\kappa > \omega$.

Lema 18.9. (Lema de aproximación) *Suponga que* $(\mathbb{P}$ *es* $ccc)^M$*, y que en* $M[G]$*,* $f : \lambda \longrightarrow \kappa$*. (*$\lambda$ *y* κ *ordinales.) Entonces en* M *existe* $F : \lambda \longrightarrow [\kappa]^{\leq\omega}$ *tal que* $\forall\alpha < \lambda(f(\alpha) \in F(\alpha))$*.*



$f \in M[G]$

$F \in M$

órdenes ccc no son tan miopes...

Así, si partimos de $(\kappa$ es un cardinal$)^M$, y $(\kappa$ no es un cardinal$)^{M[G]}$ ($\kappa > \omega$), entonces en $M[G]$ existe

$$f : \lambda \xrightarrow{sobre} \kappa,$$

para algún $\lambda < \kappa$. Por el lema, sea $F \in M$ aproximación de f. Entonces

$$\bigcup_{\alpha<\lambda} F(\alpha) = \kappa.$$

Pero esto es imposible, pues $|F(\alpha)| \leq \omega$... y así $|\bigcup_{\alpha<\lambda} F(\alpha)| \leq \text{máx}(\lambda, \omega) < \kappa$. $\square$

Demostración del lema de aproximación 18.9. En $M[G]$, $f = \tau_G$ para algún $\tau \in M$. Fije $p \in G$ tal que $p \Vdash \tau : \check{\lambda} \longrightarrow \check{\kappa}$ (usando LV).
<u>En M:</u> sea $F(\alpha) = \{\delta < \kappa | \exists q \leq p(q \Vdash \tau(\check{\alpha} = \check{\delta})\}$ (está en M por LD). Hay que ver:

1. para todo α, $F(\alpha) \ni f(\alpha)$,
2. $F(\alpha)$ es contable.

En efecto:

1. Suponga que $f(\alpha) = \delta$. Entonces $M[G] \models \tau_G(\alpha) = \delta$, y por LV, encuentre $r \in G$ tal que $r \Vdash \tau(\check{\alpha}) = \check{\delta}$. Como G es filtro, existe $q \in G$ tal que $q \leq p$ y $q \leq r$. Entonces, $q \Vdash \tau(\check{\alpha}) = \check{\delta}$. Así, $f(\alpha) = \delta \in F(\alpha)$.

2. En M tenemos[7]: dado $\delta \in F(\alpha)$, fije q_δ tal que $q_\delta \leq p$ y $q_\delta \Vdash \tau(\check{\alpha}) = \check{\delta}$. Observe que
$$\delta_1 \neq \delta_2 \Rightarrow q_{\delta_1} \perp q_{\delta_2}.$$
(Si no, sea r extensión común de q_{δ_1} y q_{δ_2}. Entonces $r \Vdash \check{\delta}_2 = \tau(\check{\alpha}) = \check{\delta}_1 \wedge \tau$ es función... imposible por LV (dirección fácil)). Como $\mathbb{P}$ es ccc, hay a lo sumo contables valores δ distintos.

□

Otros corolarios:
Forcing ccc preserva regular, débilmente inaccesible, débilmente Mahlo.
DEMOSTRACIÓN Como antes, la dirección
$$(\kappa \text{ es } \star)^M \Leftarrow (\kappa \text{ es } \star)^{M[G]}$$
no depende del forcing: todas estas propiedades relativizan hacia abajo. Lo mismo sucede al bajar de V a L.
La dirección
$$(\kappa \text{ es } \star)^M \Rightarrow (\kappa \text{ es } \star)^{M[G]}$$
sí depende del forcing y funciona (por ejemplo, aunque no exclusivamente) para forcing ccc. Para cardinales, ya lo tenemos.
<u>Regularidad:</u> suponga que κ es regular en M, pero no lo es en $M[G]$. Entonces $\kappa > \omega$ (pues ω es absoluto), y en $M[G]$ existen $\lambda < \kappa$ y $f : \lambda \longrightarrow \kappa$ tal que $\mathrm{im} f$ no está acotada en κ. Por el lema de aproximación, en M existe $F : \lambda \longrightarrow [\kappa]^{\leq\omega}$ tal que en $M[G]$ tenemos $\forall\alpha(f(\alpha) \in F(\alpha))$. Ahora bien, en M (o en $M[G]$), $\bigcup_{\alpha<\lambda} F(\alpha)$ es no acotada en κ. Pero al igual que antes, $\bigcup_{\alpha<\lambda} F(\alpha)$ es de tamaño λ, lo cual contradice la regularidad de κ.
<u>Inaccesibilidad débil:</u> κ es débilmente inaccesible ssi κ es regular y $\{\lambda < \kappa | \lambda$ es cardinal$\}$ es no acotado en κ... todas estas cosas son absolutas entre M y $M[G]$.
<u>Débilmente Mahlo:</u> Ojo con colapsos.

18.2.1. Construcciones

1. Un modelo con un débilmente inaccesible $< c$:

[7] Ojo con el uso de la ccc aquí: esencialmente dice que el orden $\mathbb{P}$ “no da demasiadas opciones” de valores posibles para las imágenes.

Tome, en M, un fuertemente inaccesible κ. Sea $\mathbb{P} = Fn(\kappa^+, 2)$. $\mathbb{P}$ agrega una κ^+-sucesión de reales distintos, y preserva cardinales. Por lo tanto,

$$M[G] \models c \geq \kappa^+ \wedge \kappa \text{ es débilmente inacc.}$$

2. Un modelo donde c es débilmente inaccesible:

   Sea $\mathbb{P} = Fn(\kappa, 2)$. Hay que verificar que $M[G] \models c = \kappa$ (¡y no es mayor!). Necesitamos acotar $(2^{\aleph_0})^{M[G]}$. En particular, si <u>en M</u>, $\mathbb{P} = Fn(\kappa, 2)$ y $\kappa^{\aleph_0} = \kappa$, entonces $M[G] \models 2^{\aleph_0} = \kappa$. Por ejemplo, si κ es fuertemente inaccesible en M, y (digamos) $M[G] \models GCH$, entonces $\kappa^{\aleph_0} = \kappa$ para todo κ con $\text{cf } \kappa \neq \aleph_0$. Entonces $M[G] \models 2^{\aleph_0} = \kappa$. Así, es consistente que $2^{\aleph_0}$ sea cualquier cosa de cofinalidad mayor que ω (cualquier cosa que no contradiga a König; recuerde que $ZFC \models \text{ cf } (c) \geq \omega_1$.

18.3. El caso de Partes

La idea, como siempre, es contar subconjuntos. Digamos que $\tau \in M^{\mathbb{P}}$. Entonces podemos, en M, coleccionar todos los nombres de posibles subconjuntos de τ, pero con cuidado.
Idea: demostrar que $\mathcal{P}(\omega)$ existe en $M[G]$ y no es demasiado grande.

Definición 18.10. *Un* **nnombre** *("nice name") de un subconjunto de τ es un nombre que tenga la forma*

$$\bigcup_{\pi \in \text{dom}\tau} \{\pi\} \times A_\pi,$$

donde A_π es una anticadena en $\mathbb{P}$.

Por ejemplo, sea $\tau = \check{\omega} = \{\langle \check{n}, \mathbb{1} \rangle | n \in \omega\}$. Si σ es un nnombre de un subconjunto de $\check{\omega}$, los elementos de σ deben ser de la forma $\langle \check{n}, p \rangle$, para muchos ps

$$\sigma = \{\ldots \langle \check{n}, p \rangle \ldots \langle \check{n}, q \rangle \ldots\}$$

Pero entonces debemos tener $p \perp q$.
Este es el lema crucial.

Lema 18.11. *Si en $M[G]$, $A \subset \tau_G$, entonces $A = \sigma_G$, donde σ es un nnombre de un subconjunto de τ.*

Corolario 18.12. $M[G] \models Partes.$

DEMOSTRACIÓN Fije $\tau_G \in M[G]$. En M, sea S el conjunto de todos los nnombres de subconjuntos de τ. S existe por Ax. Partes en M. Forme el nombre

$$S \times \{\mathbb{1}\}.$$

Entonces, en $M[G]$, tenemos $\mathcal{P}(\tau_G) \subset (S \times \{\mathbb{1}\})_G$. □
Observe que el lema sería más fácil de probar si no tuviéramos la parte "anticadena" en la definición. Y el axioma de partes aún valdría: $S = \mathcal{P}(\mathrm{dom}\tau \times \mathbb{P})$. La *razón para usar anticadenas* es esencialmente lograr mejores cotas superiores para $2^{\aleph_0}$.

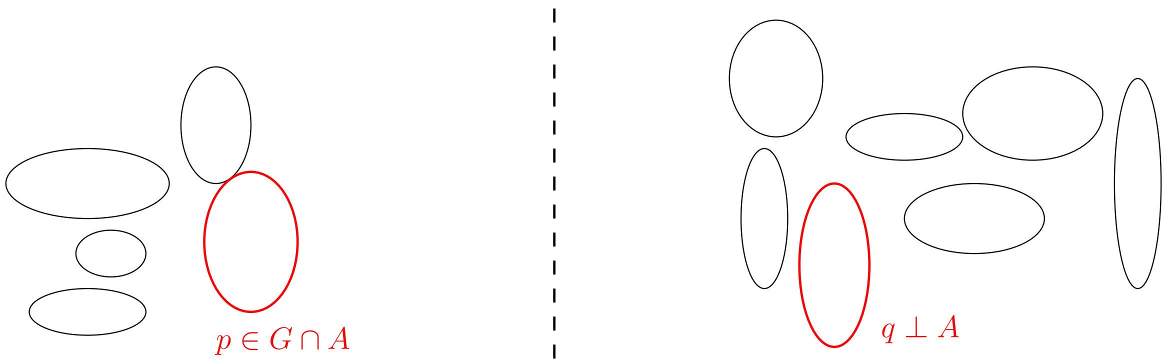
Cortos: si $\mathbb{P}$ es *ccc* y $|\mathbb{P}| = \kappa$ (por ejemplo, si $\mathbb{P} = Fn(\kappa \longrightarrow 2)$), entonces $\mathbb{P}$ tiene $\kappa^{\aleph_0}$ anticadenas, pero 2^κ subconjuntos.

Lema 18.13. *Si $A \subset \mathbb{P}$, A anticadena, $A \in M$, G $\mathbb{P}$-genérico sobre M, entonces*

o bien $G \cap A \neq \emptyset$,

o bien $\exists q \in G(q \perp A)$.

En particular, si A es anticadena maximal, $G \cap A \neq \emptyset$.



Dicotomía en genéricos y anticadenas

De hecho, genericidad es equivalente a que para toda anticadena maximal A, $G \cap A \neq \emptyset$.
DEMOSTRACIÓN Considere

$$D = \{q | q \perp A \vee \exists p \in A(q \leq p)\}.$$

Por absoluticidad, $D \in M$.
<u>D es denso:</u> sea $q \in \mathbb{P}$. O bien $q \perp A$, con lo cual $q \in D$, o bien $\exists p \in A$ tal que p, q son compatibles. Sea entonces r con $r \leq p$ y $r \leq q$. Entonces $r \leq p \in A$ con lo cual $r \in D$.
Entonces $D \cap G \neq \emptyset$ pues G es $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Tome $q \in D \cap G$. O bien $q \perp A$, lo cual da el segundo caso, o bien $\exists p \in A(q \leq p)$. Pero entonces, como G es filtro, $p \in G$, y así, $G \cap A \neq \emptyset$. □

DEMOSTRACIÓN del lema 18.11. Fije $a \subset \tau_G$. Hay que ver que $a = \sigma^*_G$ para algún nnombre σ^*. Empiece fijando $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$ con $a = \sigma_G$. Encontraremos un nnombre $\sigma^* \in M$ tal que

$$\mathbb{1} \Vdash \sigma \subset \tau \longrightarrow \sigma = \sigma^*.$$

Esto es suficiente: con esto, $M[G] \models \sigma \subset \tau \longrightarrow \sigma = \sigma^*$, con lo cual $M[G] \models a = \sigma_G = \sigma^*_G$. Ahora, olvide G. En M, sea

$$\sigma^* = \bigcup_{\pi \in \mathrm{dom}\tau} \{\pi\} \times A_\pi,$$

con

1. A_π anticadena,
2. $\forall p \in A_\pi (p \Vdash \pi \in \sigma)$,
3. A_π es maximal con respecto a (1) y (2).

Haga esto usando LD y el lema de Zorn ($A_\pi = \emptyset$ satisface (1) y (2)).

$\mathbb{1} \Vdash \sigma^* \subset \sigma$: Fije H genérico. Todo elemento de σ^*_H es de la forma π_H con $\langle \pi, p \rangle \in \sigma^*$ y $p \in H$. $p \Vdash \pi \in \sigma$, y así $\pi_H \in \sigma_H$.

$\mathbb{1} \Vdash \sigma \subset \tau \longrightarrow \sigma = \sigma^*$: Fije H genérico. Suponga que $\sigma_H \subset \tau_H$. Basta ver que $\sigma^*_H = \sigma_H$, es decir que $\sigma_H \subset \sigma^*_H$, por lo anterior. Fije un elemento de σ_H. Debe ser de la forma π_H, con $\pi \in \mathrm{dom}\tau$. Por el lema 18.13, o bien $H \cap A_\pi \neq \emptyset$, o bien $H \cap A_\pi \neq \emptyset$ o bien $\exists q \in H(q \perp A_\pi)$. Si sucede lo primero, fije $p \in A_\pi \cap H$. Entonces $\langle \pi, p \rangle \in \sigma^*$, con lo cual $\pi_H \in \sigma^*_H$. El segundo caso no puede suceder: fije $r \in H$ tal que $r \Vdash \pi \in \sigma$, por el LV. Tome $p \in H$ con $p \leq q$, $p \leq r$. Entonces $p \perp A_\pi$ y $p \Vdash \pi \in \sigma$. Esto contradice la maximalidad.

□