

para κ regular $> \omega$. (De hecho, también vale $\omega \xrightarrow{\Delta} (\omega)^n$.) El teorema falla para κ singular.

Más fuerte aún:

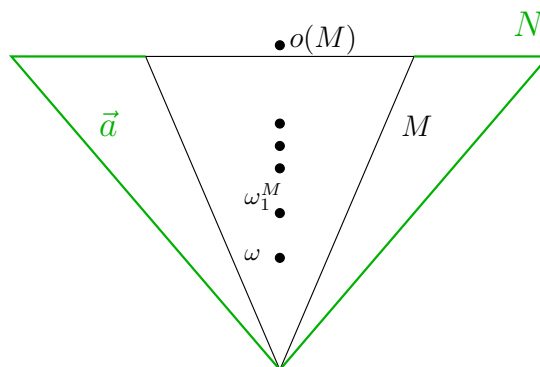
$$c^+ \xrightarrow{\Delta} (c^+)^\omega,$$

pero falla para c : dado $x \in \mathbb{R}$, sea a_x contable, $a_x \subset \mathbb{Q}$, $a_x \rightarrow x$. Así, si $x \neq y$, $a_x \cap a_y$ debe ser finito. Suponga que $\{a_x | x \in D\}$ formara un Δ -sistema ($|D| = \omega_1$). Entonces, considerando $\{a_x \setminus r | x \in D\}$, obtendríamos ω_1 subconjuntos disjuntos no vacíos de \mathbb{Q} ... absurdo.

16. La extensión genérica (I)

¿Cómo lograr $N \models ZFC + \neg CH$?

Sea M modelo contable transitivo de ZFC . De pronto $M \models CH$ (pues de pronto $ZFC \vdash CH$... hasta ahora).



$\omega_1^M, \omega_2^M, \dots$, etc. son ordinales contables en V .

En V :

♣ Fije $\vec{a} = \langle a_\xi | \xi < \omega_2^M \rangle$ una sucesión de ω_2^M reales distintos (o subconjuntos de ω , o elementos de ${}^\omega 2$, que no esté en M).

♣ Adjunte \vec{a} a M ... logre $N = M[\vec{a}]$.

$$N \models c \geq \omega_2$$

(gracias a \vec{a}).

Problema con lo anterior: agregar \vec{a} a M y lograr un modelo de ZFC , con los mismos ordinales y cardinales. Necesitamos

$$\omega_2^N = \omega_2^M.$$

¿No se puede sencillamente decir $N = M \cup \{\vec{a}\}$? ¿Qué modela lo anterior? ¡No mucho! Pero se puede entonces agregar todo lo construible con \vec{a} . Por ejemplo, se debería tener que $\{\xi | (a_\xi)^2 > 8\} \in N$.

Alegoría:

Escoja un cuerpo (por ejemplo \mathbb{Q} o \mathbb{F}_n)	Extiéndalo a $\mathbb{Q}[\pi]$	No se puede decir que $\mathbb{Q}[\pi] = \mathbb{Q} \cup \{\pi\}$	Ciérrelo
---	--------------------------------	--	----------

Mismos ordinales: $M \cap On = N \cap On$.

Mismos cardinales: si $\alpha \in M \cap On$ y (α es cardinal)^M entonces (α es cardinal)^N.

En N : $\neg \exists \beta < \alpha (f : \beta \xrightarrow{\text{sobre}} \alpha)$.

Para esta construcción, haremos slalom constante entre nivel general y nivel específico.

General: Si $\mathbb{P} \in M$ es cualquier orden, entonces $N = M[G]$, donde G es un filtro genérico sobre \mathbb{P} . Agregamos G y “cerramos bajo operaciones conjuntísticas”. Probamos

$$M[G] \models ZFC.$$

Específico: ¿Qué \models a $M[G]$ más allá de ZFC depende de \mathbb{P} .

General: $\mathbb{P} \in M$ significa $\mathbb{P} \in M$ y $\leq \in M$. Por ejemplo, $F_n(I, J) \in M$ si $I, J \in M$. Por absolutividad, $[M]^{<\omega} \subset M$, y el orden $\leq \in M \implies F_n(I, J) \in M \dots$ de nuevo por absolutividad.

Definición 16.1. G es \mathbb{P} -genérico sobre M ssi G es filtro y $G \cap D \neq \emptyset$, para todo $D \subset \mathbb{P}$ denso y elemento de M .

De nuevo aparece $MA(\omega)$:

Teorema 16.2. (Teorema de existencia de genéricos) Si M es contable, entonces $\forall q \in \mathbb{P} \exists G$ tal que G es \mathbb{P} -genérico y $q \in G$.

DEMOSTRACIÓN Igual a la de $MA(\omega)$, empezando la inducción en q . \square

Parte difícil: definir $M[G]$ y demostrar que funciona (en particular, que $M[G] \models ZFC$).

Específico: Específico general: El siguiente hecho es crucial.

Hecho 16.3. $(\mathbb{P}$ es ccc) M implica que M y $M[G]$ tienen los mismos cardinales $(\omega_\alpha^M = \omega_\alpha^{M[G]})$.

Ojo: la hipótesis es fuerte. En V , \mathbb{P} sería trivialmente ccc , pues M es contable, y $\mathbb{P} \subset M$.

Por ejemplo, si $\mathbb{P} = Fn(I, 2)$, se tiene $(\mathbb{P}$ es ccc) M , pues $(2$ es contable) M (para esto usamos (en M) que $Fn(I, J)$ es ccc si $|J| \leq \omega$).

Si $\mathbb{P} = Fn(\omega, \omega_1^M)$, entonces $(\mathbb{P}$ no es ccc) M , y $\omega_1^{M[G]} = \omega_2^M$ (de hecho, hasta ahora podemos ver fácilmente que $\omega_1^{M[G]} \geq \omega_2^M$).

Si $\mathbb{P} = Fn(\omega_2^M, 2)$, entonces $(\mathbb{P}$ es ccc) M , y $M[G] \models \neg CH$.

Específico específico: $Fn(I, J)$, digamos para $I, J \in M$, con $|I| \geq \omega$, $|J| \geq 2$. Ya vimos que en este caso

si $i \in I$, $D_i = \{p \mid i \in \text{dom}(p)\}$ es denso, y

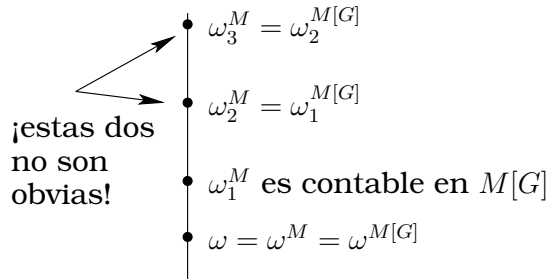
si $j \in J$, $E_j = \{p \mid j \in \text{im}(p)\}$ es denso.

pero todos estos conjuntos están en M (por absolutividad). Así, si G es $Fn(I, J)$ -genérico, tenemos

$$\bigcup G : I \xrightarrow{\text{sobre}} J.$$

Si $\mathbb{P} = Fn(\omega, \omega_1^M)$, entonces $M[G]$ incluye una función $f = \bigcup G : \omega \xrightarrow{\text{sobre}} \omega_1^M$, con lo cual

$$(\omega_1^M \text{ es contable})^{M[G]}.$$



Módulo muchas cosas que probaremos más adelante, tenemos

Hecho 16.4. *Con*($ZFC + \omega_1^L$ es contable)

DEMOSTRACIÓN Sea M un mtc (modelo transitivo contable) de $ZFC + V = L$. Entonces, si $\alpha = o(M)$, $M = L(\alpha)$, por condensación. Fuerce con $\mathbb{P} = Fn(\omega, \omega_1^M)$. Sea $N = M[G]$, y sea $\delta = \omega_1^M$. Entonces

$$N \models \delta \text{ es contable.}$$

Pero $L^N = L(\alpha) = M$ (pues $L^N = \{x \mid \exists \xi < \alpha (x \in L(\xi))\}$). Entonces,

$$N \models \delta = \omega_1^L,$$

con lo cual

$$N \models \delta = \omega_1^L \text{ es contable.}$$

□

El hecho clave en lo anterior era que M y N tienen los mismos ordinales, es decir, la misma noción de L .

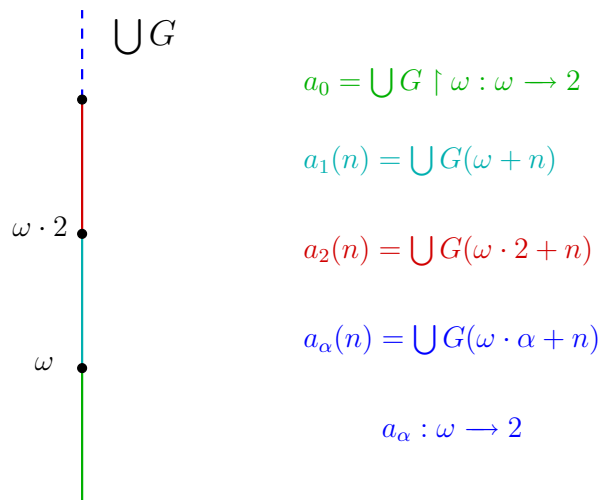
Para lograr $N \models \neg CH$, use $\mathbb{P} = Fn(\kappa, 2)$, donde (κ es un cardinal no enumerable) ^{M} .

Con esto, se tiene que $N \models 2^{\aleph_0} \geq \kappa$.

Como (\mathbb{P} es *ccc*) ^{M} , N y M tienen los mismos cardinales.

$\bigcup G$ codifica una κ -sucesión de reales distintos \vec{a}_G .

La codificación de κ reales distintos:



¿Por qué son distintos todos estos κ reales? Por genericidad: si $\alpha < \beta < \kappa$, sea

$$E_{\alpha\beta} = \{p \in \mathbb{P} \mid \exists n [p(\omega \cdot \alpha + n) \neq p(\omega \cdot \beta + n) \wedge \omega \cdot \alpha + n, \omega \cdot \beta + n \in \text{dom}(p)]\}.$$

$E_{\alpha\beta}$ es denso. Además, todos los $E_{\alpha\beta} \in M$ (por absolutividad). Como G es genérico, intersecta a todos los $E_{\alpha\beta} \dots$ luego los a_α resultan todos distintos. Así,

$$M[G] \models 2^{\aleph_0} \geq \kappa.$$

Como ejemplo, podemos tomar $\kappa = \omega_5^M = \omega_5^{M[G]}$ (pues $(\mathbb{P} \text{ es } ccc)^M$). Así, $M[G] \models 2^{\aleph_0} \geq \omega_5$.

16.1. ¿Cuándo es propia la extensión genérica?

Observe que si $\mathbb{P}, \leq \in M$, como “orden”, “denso”, “ \perp ” son absolutos y cuantificamos sobre \mathbb{P} ,

$$\{D \subset \mathbb{P} \mid D \text{ denso} \wedge D \in M\} \in M \dots$$

pero “probablemente” no es contable en M .

Entonces, un filtro genérico G “probablemente” no estará en M . En “la mayoría” de los casos, $G \in M[G] \setminus M$.

Definición 16.5. \mathbb{P} es **no atómico** ssi $\forall p \in \mathbb{P} \exists q, r \leq p (q \perp r)$.

La definición anterior es absoluta.

Por ejemplo, la Ameba \mathbb{P}_a^ε es no atómica. Dado $p \in \mathbb{R}$ con medida de Lebesgue $< \varepsilon$, podemos encontrar $q, r \in \mathbb{P}_a^\varepsilon$ con $q, r \supset p$ y $\mu(q \cup r) \geq \varepsilon$.

Otro no atómico: $Fn(I, J)$. (Cuando $|J| \geq 2$ y $|I| \geq \omega$.)

Lema 16.6. Si $\mathbb{P} \in M$ es no atómico y G es \mathbb{P} -genérico sobre M , entonces $G \notin M$.

DEMOSTRACIÓN Sea $D = \mathbb{P} \setminus G$. Obviamente, $G \cap D = \emptyset$, y si $G \in M$ entonces $D \in M$. Pero D es denso: si $p \in \mathbb{P}$, como \mathbb{P} es no atómico, obtenga $q \perp r$ con $q, r \leq p$. Como G es filtro, a lo sumo uno de q y r puede pertenecer a G , con lo cual a lo sumo uno de q y r puede pertenecer a D . \square

¿Qué es entonces $M[G]$?

La idea es agregar G , más todo lo que sea definible a partir de G . Por ejemplo, si $G \in M[G]$, también debemos tener $\bigcup G \in M[G]$, $\vec{a}_G \in M[G]$, pues $M[G] \models ZFC$.

Pero no podemos seguir muy lejos por este camino, pues caemos en razonamientos circulares (definibles sobre $M[G]$, etc.).

Para evitar esa complejidad, *definimos* $M[G]$ de una manera combinatoria “sencilla”... y luego usamos *genericidad* para demostrar

$$M[G] \models ZFC,$$

$$M[G] \text{ transitivo,}$$

$$M \subset M[G],$$

$$o(M[G]) = o(M).$$

La genericidad es clave para demostrar que $M[G] \models ZFC$.

17. La extensión genérica (II)

Fije M mtc, $\mathbb{P} \in M$ no atómico, \mathbb{P} tiene máximo $\mathbb{1}$.

Definición 17.1. τ es un \mathbb{P} -nombre ssi τ es una relación tal que si $\langle \sigma, q \rangle \in \tau$, σ es \mathbb{P} -nombre y $q \in \mathbb{P}$. $V^\mathbb{P}$ es la clase de todos los \mathbb{P} -nombres.

Definición 17.2. Dado G filtro, τ un \mathbb{P} -nombre, $\tau_G = \text{val}(\tau, G) = \{\sigma_G \mid \langle \sigma, q \rangle \in \tau \wedge q \in G\}$.

Definición 17.3. $M[G] = \{\tau_G \mid \tau \in M, \tau \text{ es } \mathbb{P}\text{-nombre}\}$.

En realidad, estas son definiciones recursivas sobre la longitud (o el rango) en V . Son absolutas para todo modelo transitivo $N \models ZF - P$:

Si N es modelo transitivo de $ZF - P$, entonces

1. Si $\tau, \mathbb{P} \in M$, $(\tau \text{ es } \mathbb{P}\text{-nombre})^M$ ssi $(\tau \text{ es } \mathbb{P}\text{-nombre})$.
2. Si $\tau, G \in N$, $(\tau_G)^N = \tau_G$.

DEMOSTRACIÓN Escoja τ de rango mínimo para el cual falla, y encuentre contradicción. \square

Aplicación en mente: M es un mtc de ZFC . $V^{\mathbb{P}}$ es clase propia. Hacemos forcing con $M^{\mathbb{P}} \stackrel{\text{def}}{=} M \cap V^{\mathbb{P}} = \{\tau \in M \mid (\tau \text{ es un } \mathbb{P}\text{-nombre})^M\}$.

En general, $G \notin M$, por lo cual (2) arriba no aplica. Sin embargo, una de las consecuencias de (2) es la **minimalidad** de $M[G]$.

Lema 17.4. Si $N \supset M$, $G \in N$, $N \models ZF - P$ transitivo, entonces $M[G] \subset N$.

DEMOSTRACIÓN Dado $\tau \in M^{\mathbb{P}}$, $\tau, G \in N$, con lo cual $(\tau_G)^N = \tau_G \in N$, y así $M[G] \subset N$. \square

17.1. Operaciones conjuntísticas y $M[G]$

El vacío: \emptyset claramente es \mathbb{P} -nombre. Dado cualquier G , $\emptyset_G = \emptyset$. Así, el vacío aparece en cualquier $M[G]$.

Singleton vacío (=1): Dado $p \in \mathbb{P}$, $\{\langle \emptyset, p \rangle\}$ es un \mathbb{P} -nombre.

$\{\langle \emptyset, p \rangle\}_G = \begin{cases} \{\emptyset\} & \text{si } p \in G \\ \emptyset & \text{si } p \notin G \end{cases}$ Esto muestra que necesitamos G para el cálculo de los valores.

En general: Si $\sigma = \{\langle \tau_n, p_n \rangle \mid n \in \omega\}$, $\sigma_G = \{(\tau_n)_G \mid p_n \in G\}$. Ojo: ¡ σ no necesariamente es nombre!

1 otra vez: $\{\langle \emptyset, \mathbb{1} \rangle\}_G = \{\emptyset\}$, para cualquier filtro G .

Usando $\mathbb{1}$ no es difícil generalizar lo anterior para ver que $M \subset M[G]$: dado $x \in M$, existe un nombre \check{x} que siempre nombra a x . Ya tenemos ejemplos para 0 y 1.

Definición 17.5. $\check{x} = \{\langle \check{y}, \mathbb{1} \rangle \mid y \in x\}$.

Por recursión en $x \in V$ y por absolutividad, $x \in M \Rightarrow \check{x} \in M$.

Por ejemplo, tenemos

$$\check{0} = 0,$$

$$\check{1} = \{\langle \check{0}, \mathbb{1} \rangle\} = \{\langle 0, \mathbb{1} \rangle\},$$

$$\check{2} = \{\langle \check{0}, \mathbb{1} \rangle, \langle \check{1}, \mathbb{1} \rangle\} = \{\langle 0, \mathbb{1} \rangle, \langle \{\langle 0, \mathbb{1} \rangle\}, \mathbb{1} \rangle\}, \text{ etc.}$$

Lema 17.6. Dado G filtro no vacío ($\mathbb{1} \in G$), $(\check{x})_G = x$.

DEMOSTRACIÓN $(\check{x})_G = \{\pi_G \langle \pi, p \rangle \in \check{x} \wedge p \in G\} = \{\check{y}_G \mid \langle \check{y}, \mathbb{1} \rangle \in \check{x} \wedge \mathbb{1} \in G\} = \{\check{y}_G \mid \langle \check{y}, \mathbb{1} \rangle \in \check{x}\} = \{\check{y}_G \mid y \in x\}$. Pero entonces podemos hacer inducción para ver que dado $x \in M$, $\check{x}_G = x$, pues si x es mínimo contraejemplo, tendríamos por lo anterior $(\check{x})_G = \{\check{y}_G \mid y \in x\} = \{y \mid y \in x\} = x$. \square

Corolario 17.7. $M \subset M[G]$.

Lema 17.8. $M[G]$ es transitivo.

DEMOSTRACIÓN Si $\tau_G \in M[G]$, todo elemento de τ_G es de la forma σ_G , que pertenece a $M[G]$. \square

Lema 17.9. $G \in M[G]$.

DEMOSTRACIÓN En M , defina el nombre

$$\Gamma = \{\langle \check{p}, p \rangle \mid p \in \mathbb{P}\}.$$

Entonces $\Gamma_G = \{\check{p}_G \mid p \in G\} = \{p \mid p \in G\} = G$. \square

La función $(G \mapsto \check{x}_G)$ es constante para cada x .

La función $(G \mapsto \Gamma_G)$ es la identidad.

Lema 17.10. $o(M[G]) = o(M)$.

DEMOSTRACIÓN $o(M) = On \cap M$, el mínimo ordinal que no está en M . Como $M \subset M[G]$, $o(M) \leq o(M[G])$. Para la otra desigualdad, usamos el siguiente lema.

Lema 17.11. $\forall \tau \in M^{\mathbb{P}}(\text{ran}(\tau_G) \leq \text{ran}(\tau))$.

DEMOSTRACIÓN Inducción en ran :

$$\begin{aligned} \text{ran}(\tau_G) &= \sup\{\text{ran}(y) + 1 \mid y \in \tau_G\} \leq \\ &\leq \sup\{\text{ran}(\sigma_G) + 1 \mid \exists p(\langle \sigma, p \rangle \in \tau)\} \leq \\ &\leq \sup\{\text{ran}(\sigma) + 1 \mid \exists p(\langle \sigma, p \rangle \in \tau)\} \leq \text{ran}(\tau). \end{aligned}$$

Así, si $\alpha \in M[G]$ es un ordinal, como $\alpha = \tau_G$ para algún $\tau \in M^{\mathbb{P}}$,
 $\alpha = \text{ran}(\alpha) \leq \text{ran}(\tau) < o(M)$ (pues $\tau \in M$). □

17.2. Clausura bajo pares y uniones

Definición 17.12. Dados $\sigma, \tau \in V^{\mathbb{P}}$, $\text{par}(\sigma, \tau) = \{\langle \sigma, \mathbb{1} \rangle, \langle \tau, \mathbb{1} \rangle\}$.

Lema 17.13. $\text{par}(\sigma, \tau)_G = \{\sigma_G, \tau_G\}$.

Definición 17.14. Dados $\sigma, \tau \in V^{\mathbb{P}}$, $\text{pord}(\sigma, \tau) = \text{par}(\text{par}(\sigma, \sigma), \text{par}(\sigma, \tau))$.

Lema 17.15. $\text{pord}(\sigma, \tau)_G = \langle \sigma_G, \tau_G \rangle$.

Definición 17.16. Dados $\sigma, \tau \in V^{\mathbb{P}}$, $\text{un}(\sigma, \tau) = \sigma \cup \tau$.

Lema 17.17. $\text{un}(\sigma, \tau)_G = \sigma_G \cup \tau_G$.

Por lo tanto, si $x, y \in M[G]$, entonces $\{x, y\}, \{x\}, x \cup y \in M[G] \dots$ y así

$$M[G] \models \text{Fund}, \text{Ext}, \text{Pares}.$$

18. LD y LV

Recuerde que $(\tau_1 \cup \tau_2)$ nombra a la unión: $(\tau_1 \cup \tau_2)_G = (\tau_1)_G \cup (\tau_2)_G$. En el caso de la intersección, no podemos sencillamente intersectar los nombres: de pronto $\tau_1 = \{\langle \sigma_1, \mathbb{1} \rangle\}$, $\tau_2 = \{\langle \sigma_2, \mathbb{1} \rangle\}$, para nombre σ_1 y σ_2 . Ahora bien, $\tau_1 \cap \tau_2 = \emptyset$, pero de pronto $(\sigma_1)_G = (\sigma_2)_G$ (depende de G). Por ejemplo, $\check{1} = \{\langle 0, \mathbb{1} \rangle\}$ siempre nombra a $\{0\}$, pero $\{\langle 0, p \rangle\}$ nombra a $\begin{cases} \{0\} & \text{si } p \in G \\ \emptyset & \text{si } p \notin G \end{cases}$.

Viviendo en M , podemos razonar acerca de esto:

$p \Vdash \sigma_1 = \sigma_2$ implica que para todo G genérico, si $p \in G$ entonces $(\sigma_1)_G = (\sigma_2)_G$. El lema de la definibilidad tiene como caso especial que $\{p \mid p \Vdash \sigma_1 = \sigma_2\} \in M$ para todo par de nombres σ_1 y σ_2 .