

MA es entonces sencillamente $m = c \dots$ y esto implica que m es regular. Sin embargo, m puede ser singular. En el modelo de Cohen para $\neg CH$, $\omega_1 = m < c$. Es fácil, por ejemplo, construir modelos en los cuales

$$m = \omega_3 \quad \wedge \quad c = \omega_5.$$

Kunen: $Con(m = \aleph_{\omega_1} < c)$.

Miller-Fremlin: $cf(m) \neq \omega$.

Pregunta Abierta 14.18. ¿Es consistente tener $cf(m) = \omega_2 < m$? (Por ejemplo, ¿es posible $m = \aleph_{\omega_2}$?)

15. Δ -sistemas

Definición 15.1. $F_n(I, J) = \{p : I \rightarrow J \mid |p| < \omega\}$.

Convención 15.2. Usamos tres puntos en $p : I \rightarrow J$ para decir que p es función **parcial** de I en J .

Si G es prefiltro, entonces G es dos a dos compatible, con lo cual $\bigcup G = \bigcup_{p \in G} p$ es una función parcial (de pronto total).

Piense en $p \in \mathbb{P}$ como una aproximación finita a $\bigcup G$.

Algunos densos:

Para $i \in I$, $D_i = \{p \mid i \in \text{dom}(p)\}$ es denso (si $J \neq \emptyset$): $\forall q \exists p \leq q (i \in \text{dom}(p))$: si $i \notin \text{dom}(q)$, sea $p = q \cup \{(i, j)\}$ para cualquier $j \in J$.

Para $j \in J$, $E_j = \{p \mid i \in \text{im}(p)\}$ es denso (si I es infinito). Fije $i \notin \text{dom}(q)$, y sea $p = q \cup \{(i, j)\}$.

Pero entonces... si $G \cap D_i \neq \emptyset$ para todo $i \in I$, entonces $\text{dom}(\bigcup G) = I$, y si $G \cap E_j \neq \emptyset$ para todo $j \in J$, entonces $\text{im}(\bigcup G) = J$.

Claro, si $|I| = \omega$, $|J| = \omega_1$, esto es imposible. Así, ningún G puede intersectar a todos los $E_j \dots$ pues esto sería $SMA(\omega_1)$.

Lo anterior no contradice $MA(\omega_1)$, pues $F_n(I, J)$ no es *ccc* cuando $|J| \geq \omega_1$.

Ojo: en $F_n(\omega_6, \omega_5)$ hay F_α 's densos ($\alpha < \omega_1$) tales que ningún prefiltro los interseca a todos.

$$F_\alpha = \{q \mid \exists n \in \text{dom}(q) \cap \omega, q(n) = \alpha\}.$$

Si existiera un (F_α) -genérico, tendríamos $\text{im}(\bigcup G \upharpoonright \omega) \supset \omega_1 \dots$ contradicción.

Hecho 15.3. Si J es contable, entonces $F_n(I, J)$ es ccc.

Usamos el siguiente teorema.

Teorema 15.4. (Lema del Δ -sistema) Dados conjuntos finitos a_ξ , para $\xi < \omega_1$, existe $S \subset \omega_1$ no contable tal que $\{a_\xi \mid \xi \in S\}$ forma un Δ -sistema.

Corolario 15.5. J contable implica $F_n(I, J)$ es ccc.

DEMOSTRACIÓN Sean p_ξ ($\xi < \omega_1$) una anticadena. Sea $a_\xi = \text{dom}(p_\xi)$. Por el lema del Δ -sistema, sea $S \subset \omega_1$ no contable tal que $\{a_\xi \mid \xi \in S\}$ forma un Δ -sistema, con raíz r . Como $p_\xi \perp p_\eta$ para $\xi, \eta \in S$, los $p_\xi \upharpoonright r$ para $\xi \in S$ son todos distintos. Esto es imposible, pues $|J^r| \leq \aleph_0$. \square

Los elementos de \mathbb{P} son “aproximaciones” a objetos que uno está interesado en construir. Por ejemplo, en el forcing de la ameba, $p \leq q \Leftrightarrow p \supset q$: p es una mejor aproximación a $\bigcup G$. En el ejemplo de Baire, $p \leq q \Leftrightarrow p \subset q$, estamos construyendo $K = \bigcap \{\bar{p} \mid p \in G\}$: p está “más cercano” a esa intersección que q .

Definición 15.6. $G \subset \mathbb{P}$ es un **filtro** ssi G es un prefiltro y G es cerrado hacia arriba:

$$\forall p \in G \forall q \in \mathbb{P} (q \geq p \rightarrow q \in G).$$

Para MA : da la misma usar filtros que usar prefiltros. Si \mathcal{D} es una familia de densos,

$$\exists G \text{ prefiltro tal que } \forall D \in \mathcal{D} [D \cap G \neq \emptyset]$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists G \text{ filtro tal que } \forall D \in \mathcal{D} [D \cap G \neq \emptyset]$$

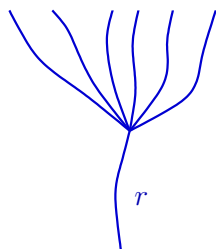
En general, depende.

Recuerde que $F_n(I, J)$ es ccc si y solo si J es contable ($I \neq \emptyset$).

En el forcing de Cohen ($F_n(I, 2)$), esto es crucial.

En la prueba usamos el lema del Δ -sistema.

Teorema 15.7. Si $(a_\xi)_{\xi < \omega_1}$ es una colección de conjuntos finitos, entonces existe $D \in [\omega_1]^{\omega_1}$ tal que $\{a_\xi \mid \xi \in D\}$ forman un Δ -sistema.



Un Δ -sistema

Daremos otra aplicación antes de la demostración.

Pregunta 15.8. *Dados X, Y ccc, es $X \times Y$ ccc?*

Más en general, qué se preserva bajo \times ? Sabemos que

Compacidad: sí.

T_3 : sí.

T_4 : no.

ccc: independiente.

Galvin: $CH \rightarrow$ no.

Folklore: $MA(\omega_1) \rightarrow$ sí.

Sin embargo, podemos probar directamente que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n$ son ccc (pues son 2-contables)... y no sólo eso, sino

$$\mathbb{R}^\kappa \text{ es ccc, } \forall \kappa$$

(aunque para $\kappa > \omega$, \mathbb{R}^κ no sea 2-contable). Todo esto, por el teorema siguiente.

Teorema 15.9. (ZFC) *Si $\prod_{i \in I} X_i$ no es ccc entonces existe $r \subset^{fin} I$ tal que $\prod_{i \in r} X_i$ no es ccc. Así, si $MA(\omega_1)$, todo producto finito de espacios ccc es ccc.*

DEMOSTRACIÓN Sea $(U_\xi)_{\xi < \omega_1}$ una familia de abiertos disyuntos en $\prod_{i \in I} X_i$. Spdg, los U_ξ son básicos. Entonces,

$$U_\xi = \prod_{i \in I} U_\xi^i,$$

con U_ξ^i abierto en X_i , $U_\xi^i = X_i$ para todos salvo finitos $i \in I$; esto nos da la finitud de

$$a_\xi = \{i \in I \mid U_\xi^i \neq X_i\}.$$

Sea (por el lema del Δ -sistema) $D \in [\omega_1]^{\omega_1}$ tal que $\{a_\xi \mid \xi \in D\}$ es un Δ -sistema con raíz r . Entonces, en $\prod_{i \in I} X_i$, los abiertos $\prod_{i \in r} U_\xi^i$ son disyuntos. \square

Corolario 15.10. *Bajo $MA(\omega_1)$, todo producto de espacios ccc es ccc .*

DEMOSTRACIÓN Por lo anterior, basta ver que todo producto de dos espacios ccc es ccc . Suponga entonces que X y Y son ccc , y $X \times Y$ no lo es. Sea $\{W_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ una familia de abiertos no vacíos dos a dos disyuntos en $X \times Y$. Para cada α , escoja una caja vacía abierta $U_\alpha \times V_\alpha \subset W_\alpha$. Sea $A \in [\omega_1]^{\omega_1}$ tal que $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ tiene la pif. Si $\alpha \neq \beta \in A$, entonces $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, pero $U_\alpha \times V_\alpha \cap U_\beta \times V_\beta \subset W_\alpha \cap W_\beta = \emptyset$, con lo cual $V_\alpha \cap V_\beta = \emptyset$. Por lo tanto, $\{V_\alpha \mid \alpha \in A\}$ contradice que Y es ccc . \square

DEMOSTRACIÓN del lema del Δ -sistema (15.4): Spdg, existe $n < \omega$ tal que $|a_\xi| = n$ para todo ξ (en todo caso, existen \aleph_1 con el mismo tamaño).

Probamos el lema por inducción sobre n . Si $n = 0$, es trivial. Suponga que vale para n , y tome ahora $|a_\xi| = n + 1$ para todo ξ .

Caso (I): $\exists E \in [\omega_1]^{\omega_1} \exists x \forall \xi \in E (x \in a_\xi)$. Para $\xi \in E$, sea $b_\xi = a_\xi \setminus \{x\}$, con lo cual $|b_\xi| = n$. Por hipótesis de inducción, sea $D \in [E]^{\omega_1}$ tal que $\{b_\xi \mid \xi \in D\}$ forman un Δ -sistema con raíz r . Entonces $\{a_\xi \mid \xi \in D\}$ forman un Δ -sistema con raíz $r \cup \{x\}$.

Caso (II): no Caso (I). Es decir, para todo x , $\{\xi \mid x \in a_\xi\}$ es contable. Sea entonces $r = \emptyset$. Por inducción sobre $\mu < \omega_1$, escoja

$$\xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_\mu < \dots$$

tal que todos los a_{ξ_μ} son disyuntos. \square

Lo que hemos demostrado es

$$\omega_1 \xrightarrow{\Delta} (\omega_1)^{<\omega}.$$

Una prueba igual nos da

$$\kappa \xrightarrow{\Delta} (\kappa)^{<\omega}$$

para κ regular $> \omega$. (De hecho, también vale $\omega \xrightarrow{\Delta} (\omega)^n$.) El teorema falla para κ singular.

Más fuerte aún:

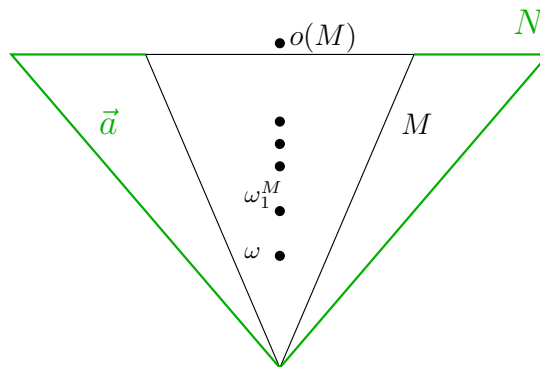
$$c^+ \xrightarrow{\Delta} (c^+)^\omega,$$

pero falla para c : dado $x \in \mathbb{R}$, sea a_x contable, $a_x \subset \mathbb{Q}$, $a_x \rightarrow x$. Así, si $x \neq y$, $a_x \cap a_y$ debe ser finito. Suponga que $\{a_x | x \in D\}$ formara un Δ -sistema ($|D| = \omega_1$). Entonces, considerando $\{a_x \setminus r | x \in D\}$, obtendríamos ω_1 subconjuntos disjuntos no vacíos de \mathbb{Q} ... absurdo.

16. La extensión genérica (I)

¿Cómo lograr $N \models ZFC + \neg CH$?

Sea M modelo contable transitivo de ZFC . De pronto $M \models CH$ (pues de pronto $ZFC \vdash CH$... hasta ahora).



ω_1^M, ω_2^M , etc. son ordinales contables en V .

En V :

♣ Fije $\vec{a} = \langle a_\xi | \xi < \omega_2^M \rangle$ una sucesión de ω_2^M reales distintos (o subconjuntos de ω , o elementos de ${}^\omega 2$, que no esté en M).

♣ Adjunte \vec{a} a M ... logre $N = M[\vec{a}]$.

$$N \models c \geq \omega_2$$

(gracias a \vec{a}).