TEORÍA DE CONJUNTOS - Cuarta Tarea

I-2006 - Andrés Villaveces

Fecha límite: junio 6

Entregue **5** puntos. (Haremos todos los puntos en clase cuando entreguen, pero usted es responsable por entregar 5 puntos.) Disfruten esta tanda de ejercicios - si la hacen con cuidado, puede ser muy divertido entender todo lo que ocurre aquí. Como siempre, recomiendo **muy fuertemente** que vayan aprovechando el tiempo y lleguen el lunes 22 con preguntas sobre esta tanda... si dejan para última hora es probable que no logren entender partes cruciales de la tarea.

Trabaje en ZFC. Recuerde que si $M \subset N$, $M \prec N$ significa $(M, \in) \prec (N, \in)$ (lenguaje solo $\in, =$). Si $A \subset M$ y $B \subset N$, $(M, A) \prec (N, B)$ abrevia $(M, A, \in) \prec (N, B, \in)$ (lenguaje ahora consta de $\in$, $=$ y P donde P es símbolo de predicado unario). Note que $(M, A) \prec (N, B)$ implica, entre otras cosas, que $B \cap M = A$.

1. (Kunen) Sean κ fuertemente inaccesible y α el mínimo ordinal tal que $\mathcal{R}(\alpha) \equiv \mathcal{R}(\kappa)$. Demuestre que $\mathcal{R}(\alpha)$ no es un submodelo elemental de $\mathcal{R}(\kappa)$. *Ayuda:* Observe que $Th(\mathcal{R}(\kappa)) \in \mathcal{R}(\omega + 1)$.

2. Recuerde que un subconjunto $C \subset \kappa$ se llama **club** ssi C es cerrado y no acotado (**cl**osed **unb**ounded) en la topología del orden de κ. Demuestre que si κ es regular y $\kappa > \omega$, entonces existe un club $C \subset \kappa$ tal que $L(\alpha) \prec L(\kappa)$, para todo $\alpha \in C$.

3. (Para los que quieran entender más acerca de la sintaxis y modelos pequeños) Sea SM la sentencia (consulte Kunen, pág. 182 y aledañas)

$$\exists M(M \text{ transitivo } \wedge M \models \ulcorner ZF \urcorner).$$

(a) Muestre que en $ZF + SM$ se puede demostrar que existe un δ tal que

$$(L(\delta) \models \ulcorner ZF \urcorner) \wedge \forall M((M \text{ transitivo } \wedge M \models \ulcorner ZF \urcorner) \rightarrow L(\delta) \subset M),$$

(b) Demuestre que $L(\delta) \models ZFC + V = L + \neg SM$. (Lo visto en clase no lo repita; basta con que lo mencione.)

(c) Use lo anterior para derivar una prueba de

$$Con(ZF) \rightarrow Con(ZF + \neg SM).$$

(d) ¿Son estándar o no estándar las pruebas hechas en $L(\delta)$?

4. κ es **fuertemente Mahlo** ssi es fuertemente inaccesible y todo club $C \subset \kappa$ contiene algún cardinal regular. Demuestre que para κ fuertemente Mahlo, existe un cardinal **regular** $\alpha < \kappa$ tal que $\mathcal{R}(\alpha) \prec \mathcal{R}(\kappa)$.

5. κ es **hiperinaccesible** ssi κ es fuertemente inaccesible y existen κ fuertemente inaccesibles por debajo de κ. κ es **hiperhiperinaccesible** ssi κ es hiperinaccesible y existen κ hiperinaccesibles por debajo de κ. Demuestre que si κ es fuertemente Mahlo, entonces κ es hiperhiperhiperhiperhiperhiperhiperhiperhiperhiperhiperhiperhiperinaccesible.

6. κ es **fuertemente hiperMahlo** ssi es fuertemente inaccesible y todo club $C \subset \kappa$ contiene algún cardinal fuertemente Mahlo. Suponga que κ es el primer cardinal fuertemente Mahlo tal que existen κ fuertemente Mahlos bajo κ. Demuestre que κ no es fuertemente hiperMahlo.

7. κ es **débilmente compacto** ssi dado $A \subset \mathcal{R}(\kappa)$, existe $N \supsetneq \mathcal{R}(\kappa)$ y $B \subset N$ tal que $(\mathcal{R}(\kappa), A, \in) \prec (N, B, \in)$. Demuestre que si κ es débilmente compacto, entonces κ es fuertemente hiperhiperhiperhiperhiperhiperhiperhiperhiperhiperhiperhiperhiperMahlo.

8. (Una aplicación de temas vistos en clase a Topología General, debida a R. Pol.) Demuestre el siguiente teorema (de Arkhangel'skiĭ) usando submodelos elementales.

   $\boxed{\text{Si } X \text{ es un espacio de Lindelöf 1-contable de Hausdorff entonces } |X| \leq 2^{\aleph_0}.}$

   Sea τ la familia de los abiertos de X. Sea $S = \{X, \tau\}$, y sea κ suficientemente grande para que $S \in H(\kappa)$. Sea A como en (5). Demuestre que $X \subset A$. Puede empezar verificando que $X \cap A$ es cerrado (ya que las clausuras están determinadas por ω-sucesiones); luego, si $p \in X \setminus A$, un recubrimiento contable de $X \cap A$ por conjuntos en $\tau \restriction A$ contradiría que A es submodelo elemental de $H(\kappa)$. (**Nota:** puede usar sin demostrar la siguiente versión fuerte de LS$\searrow$: si $S \subset H(\kappa)$, con $\kappa > \omega$, κ regular y $|S| \leq 2^{\aleph_0}$, entonces existe A tal que $S \subset A \prec H(\kappa)$, $|A| = 2^{\aleph_0}$, y $A^\omega \subset A$.)