

TEORÍA DE CONJUNTOS - PROBLEMAS

I-2006

Fecha límite: Martes 2 de mayo

Trabaje en ZF , excepto donde diga que puede usar AC .

1. (Kunen) Sean $M_0 = On$ y $M_{n+1} = \mathcal{P}(M_n)$. Sea $M = \bigcup_{n \in \omega} M_n$. Demuestre que esta definición tiene sentido, a pesar de que los M_n sean clases propias. Demuestre que M es un modelo transitivo de $Z +$ “todo buen orden es isomorfo a un ordinal de von Neumann”, y que alguna instancia de Reemplazo falla en M .

2. Demuestre (sin usar AC) que ω_2 no es unión enumerable de conjuntos enumerables.

3. (AC) Suponga que $V_\gamma \models ZFC$. Demuestre que $\gamma = \beth_\gamma$ y que γ es el γ -ésimo cardinal con esa propiedad.

Pista: demuestre por inducción sobre $\beta < \gamma$ que $\beth_\beta < \gamma$ (¡esto implica que $\beth_\gamma \leq \gamma$!). En el caso sucesor, use que V_γ satisface Partes. En el caso límite, use que V_γ satisface Reemplazo, más la *absolutividad* de \beth (**no tiene que demostrar esta última**). Para ver que γ es el γ -ésimo punto fijo, basta observar que como $V_\gamma \models ZFC$, en V_γ los puntos fijos de \beth son no acotados (más absolutividad de \beth , que puede usar libremente).

4. (AC) Suponga que $V_\alpha \prec V_\beta$, α es regular y $\alpha < \beta$. Demuestre que α es fuertemente inaccesible, y que es el α -ésimo fuertemente inaccesible.

Pista: α es cardinal regular; falta ver que es límite fuerte. Si existe $\gamma < \alpha$ con $\alpha \leq 2^\gamma$, entonces sea W un buen orden de un **subconjunto** de $\mathcal{P}(\gamma)$ de tipo de orden exactamente α . Entonces

$$V_\beta \models \text{“t.o.}(W) \text{ existe”}$$

pero

$$V_\alpha \models \text{“}\neg \text{t.o.}(W) \text{ existe”}$$

Para ver que α es el α -ésimo f. inacc., observe que en V_β vale que existe un f. inacc. (α), luego en V_α vale que existe un f. inacc. ... y use que si $\gamma < \alpha$ es f. inacc., en V_β vale que existe un f. inacc. mayor que γ .

5. ¿Pueden existir modelos transitivos V y W tales que $V \subset W$, $\mathcal{P}(\omega) \cap V = \mathcal{P}(\omega) \cap W$, pero CH vale en uno de los dos y falla en el otro? (Analizar los dos casos.)