7 - Modalidades

Andrés Villaveces

(basado en notas anteriores de Fernando Zalamea)

Lógica I (filosofía) - Bogotá, II-2003

Lógica medieval árabe

Predestinación: $p \longrightarrow \Box p$.
Modalidades *temporales* (**Avicena, al-Qazwini**):
$(A/\Box/B)$: "A es necesariamente cierto siempre que B es cierto"
$(A/\forall/B)$: "A es cierto siempre que B es cierto"
$(A/\exists/B)$: "A es cierto en algún momento en que B es cierto"
$(A/\Diamond/B)$: "A es posible en algún momento en que B es cierto"
Mediante éstas, los lógicos pretenden establecer relaciones fundamentales con la "esencia" del ser.

Lógica medieval europea

Modalidades *de dicto* (sobre una proposición) versus *de re* (sobre un término). Clara distinción de lenguaje-objeto y metalenguaje en **Abelardo** y **Pedro Hispano.**

Reinterpretación del lugar del hombre ante Dios y la naturaleza. *Necesidad absoluta* de las leyes de la lógica versus *necesidad hipotética* de las leyes naturales.

Teología - Lógica - Ockham

Argumentaciones teológicas (**Aquino, Alberto Magno**) alrededor del conocimiento divino de las verdades *contingentes.* ¡**Ockham** da una lista de 1386 silogismos modales!
Pocas contribuciones a la lógica modal entre la Edad Media y el auge moderno (siglo XX) de la lógica matemática, a excepción de **Leibniz** (probablemente Duns Escoto). Mundos posibles, necesidad y posibilidad.

Modos básicos

Necesidad — Contingencia

$$
\begin{tikzcd}
\Box p \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & \neg\Box p \equiv \Diamond\neg p \arrow[d] \\
\Diamond p \arrow[r] \arrow[ur] & \neg\Diamond p \equiv \Box\neg p
\end{tikzcd}
$$

Posibilidad — Imposibilidad

Kripke

Kripke proporciona la primera semántica “natural” para la modalidad.

Marco modal: $\mathfrak{M} = (M, R)$. M es el conjunto de “mundos posibles”. R la relación de “accesibilidad” entre mundos. Un *modelo modal* es una tripla (M, R, V), donde (M, R) es un marco modal y $V : M \to \mathcal{P}(P)$, P son las letras proposicionales ‘del discurso’. $V(m)$ “dice” cuáles son “verdaderas” en el mundo $m \in M$.

Semántica básica

$\mathfrak{M} \rhd_m p$ ssi $p \in V(m)$,

$\mathfrak{M} \rhd_m \alpha \vee \beta$ ssi $\mathfrak{M} \rhd_m \alpha$ o $\mathfrak{M} \rhd_m \beta$,

$\mathfrak{M} \rhd_m \neg\alpha$ ssi es falso que $\mathfrak{M} \rhd_m \alpha$,

$\mathfrak{M} \rhd_m \Box\alpha$ ssi para todo n si mRn entonces $\mathfrak{M} \rhd_m \alpha$.

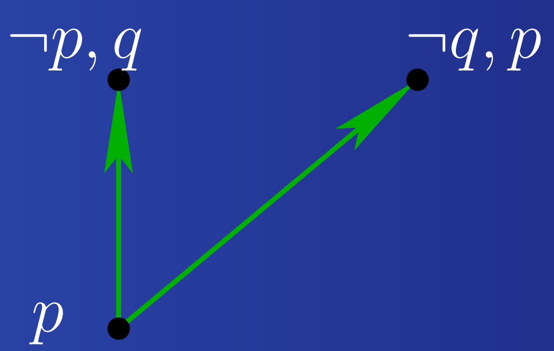
Ejemplos

$\Diamond p \rightarrow \Box p$ falla en el modelo 

("si el universo admite variación, las modalidades no se trivializan")

Más ejemplos

- $\Box p \rightarrow \Diamond p$ falla en el modelo $\bullet \; p$ (sin bucle)
  (“en un universo inaccesible, las modalidades se trivializan”)
- $\Box(p \vee q) \rightarrow (\Box p \vee \Box q)$ falla en el modelo



Accesibilidad

Lo anterior muestra como las leyes modales quedan representadas por propiedades de accesibilidad entre mundos posibles. En un sistema lógico, una de las propiedades más importantes es alguna instancia de un **teorema de completitud.** Estos teoremas dan lugar a simbiosis estrecha entre las leyes lógicas (axiomas, deducciones) y propiedades representativas de la semántica. En el caso modal, tenemos lo siguiente.

Instancias de completitud modales

Sea un marco modal $\mathfrak{M} = (M, R)$. Entonces

$\mathfrak{M} \rhd \Box p \rightarrow p$	ssi	R es reflexiva,
$\mathfrak{M} \rhd p \rightarrow \Box\Diamond p$	ssi	R es simétrica,
$\mathfrak{M} \rhd \Box p \rightarrow \Box\Box p$	ssi	R es transitiva,
$\mathfrak{M} \rhd \Box p \rightarrow \Diamond p$	ssi	$\mathrm{Dom}\ R = M$,
$\mathfrak{M} \rhd \Diamond p \rightarrow \Box p$	ssi	R es función.

Modulaciones y mundos posibles

Así, las “modulaciones” de la modalidad corresponden a un preciso tipo de vaivén entre los “mundos posibles”. Así, presupuestos “epistemológicos” sobre la “accesibilidad” del conocimiento no pueden hacerse a la ligera: hay una lógica profunda que los sostiene.