

“mundos”. Una lógica para la cual modelos de Kripke “similares” funciona es la **lógica intuicionista**.

Lógica intuicionista: un intento de capturar los procesos típicos de una matemática **constructivista**.

La lógica intuicionista no introduce símbolos nuevos. Es una sublógica de la lógica clásica, en la cual los axiomas que dan lugar al **tercio excluso** se evitan. De manera precisa, se puede dar una axiomatización de la parte proposicional de la lógica intuicionista I tal que

$$I + [(\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \varphi)]$$

dan lugar al cálculo proposicional clásico. En cualquier caso, en lógica intuicionista tenemos la siguiente situación (observe que todas las sentencias que aparecen en la tabla son válidas clásicamente).

	Vale	Falla
Doble negación	$\vdash_i \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$ $\vdash_i \neg\varphi \rightarrow \neg\neg\neg\varphi$	$\vdash_i \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$
Distr. de la $\neg\neg$	$\vdash_i \neg\neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi)$ $\vdash_i \neg\neg(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi)$	$\vdash_i \neg\neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\neg\varphi \vee \neg\neg\psi)$
Leyes de De Morgan	$\vdash_i \neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi$ $\vdash_i \neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$	$\vdash_i \neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$
Cuantif.	$\vdash_i \neg\exists x\varphi(x) \leftrightarrow \forall x\neg\varphi(x)$ $\vdash_i \neg\forall x\varphi(x) \leftrightarrow \exists x\neg\varphi(x)$	$\vdash_i \neg\forall x\varphi(x) \rightarrow \exists x\neg\varphi(x)$
Absorción	$\vdash_i \neg\neg\forall x\varphi(x) \rightarrow \forall x\neg\neg\varphi(x)$	$\vdash_i \neg\neg\forall x\varphi(x) \leftarrow \forall x\neg\neg\varphi(x)$
Absorción	$\vdash_i \exists x\neg\neg\varphi(x) \rightarrow \neg\neg\exists x\varphi(x)$	$\vdash_i \exists x\neg\neg\varphi(x) \leftarrow \neg\neg\exists x\varphi(x)$
Indep. premisa		$(\varphi \rightarrow \exists x\psi(x)) \rightarrow \exists x(\varphi \rightarrow \psi(x))$.

3. **La semántica.** He aquí la versión de modelos de Kripke adecuada para esta lógica. Fije un lenguaje \mathcal{L} . Un **\mathcal{L} -modelo de Kripke** para la lógica intuicionista es una 4-pla

$$\mathcal{K} = (\mathbb{P}, \leq, \mathfrak{A}_p, f_{pq})_{p \leq q \in \mathbb{P}}$$

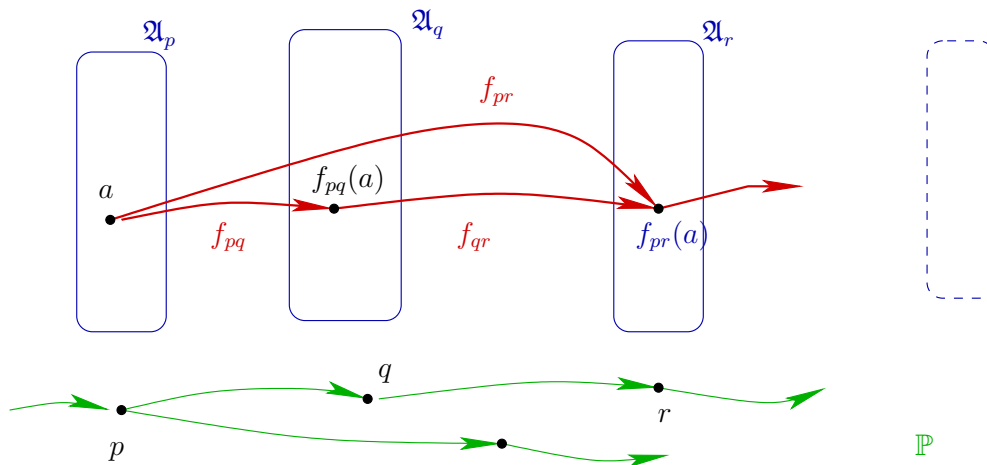
tal que

- ♣ (\mathbb{P}, \leq) es un orden,
- ♣ para todo $p \in \mathbb{P}$, \mathfrak{A}_p es una \mathcal{L} -estructura,
- ♣ dados $p \leq q \in \mathbb{P}$, $f_{pq} : \mathfrak{A}_p \rightarrow \mathfrak{A}_q$ es un homomorfismo,

- ♣ para todo $p \in \mathbb{P}$, $f_{pp} = \text{id}_{\mathfrak{A}_p}$, y
- ♣ dados $p \leq q \leq r \in \mathbb{P}$, $f_{pr} = f_{qr} \circ f_{pq}$.

La idea intuitiva subyacente a esta definición es simular un *modelo variable* \mathfrak{A} con respecto al orden \mathbb{P} (que se puede ver heurísticamente como “el tiempo”). Los objetos son esencialmente **objetos variables** con “instancias en tiempo p ” dadas por los elementos de A_p .

Dado $a \in A_p$, y dado $q \geq p$, $f_{pq}(a)$ es un elemento de A_q , la “versión de a en tiempo (futuro) q ”: la idea conductora de esta semántica es que un **objeto** consta de a y de todas sus versiones futuras $f_{pq}(a)$ para $q \geq p$.



Definimos la noción

$$\mathcal{K} \Vdash_p \varphi$$

(el modelo de Kripke \mathcal{K} fuerza φ en p) por inducción en la complejidad de φ :

φ atómica: por ejemplo si $\varphi = R(v_1, \dots, v_n)$, definimos

$$\mathcal{K} \Vdash_p \varphi[a_1 \dots a_n] \text{ ssi } (a_1 \dots a_n) \in R^{\mathfrak{A}_p},$$

$$\varphi = \psi \wedge \chi: \mathcal{K} \Vdash_p \varphi \text{ ssi } \mathcal{K} \Vdash_p \psi \text{ y } \mathcal{K} \Vdash_p \chi,$$

$$\varphi = \psi \vee \chi: \mathcal{K} \Vdash_p \varphi \text{ ssi } \mathcal{K} \Vdash_p \psi \text{ o } \mathcal{K} \Vdash_p \chi,$$

$$\varphi = \neg\psi: \mathcal{K} \Vdash_p \varphi \text{ ssi para todo } q \geq p, \mathcal{K} \not\Vdash_q \psi.$$

$$\varphi = \psi \rightarrow \chi: \mathcal{K} \Vdash_p \varphi \text{ ssi para todo } q \geq p, \mathcal{K} \Vdash_q \psi \text{ implica que } \mathcal{K} \Vdash_q \chi,$$

$$\varphi = \exists x\psi(x): \mathcal{K} \Vdash_p \varphi \text{ ssi existe un } a \in A_p \text{ tal que } \mathcal{K} \Vdash_p \psi[a],$$

$\varphi = \forall x\psi(x)$: $\mathcal{K} \Vdash_p \varphi$ ssi para todo $q \geq p$, para todo $a \in A_q$, $\mathcal{K} \Vdash_q \psi[a]$.

Dos hechos claves: por un lado, la definición “mira futuros” (es no clásica) tan solo en los pasos que involucran \neg , \rightarrow y \forall . En los demás es esencialmente clásico el forzamiento. Por otro lado, esta relación es “monótona” (o acumulativa): si $p \leq q$ y $\mathcal{K} \Vdash_p \varphi$, entonces $\mathcal{K} \Vdash_q \varphi$. Esto corresponde a la idea intuitiva de “información” que se acumula en el tiempo.

Como forzar la negación requiere mirar futuros, tenemos (ejercicio) que

$$\mathcal{K} \Vdash_p \neg\neg\varphi \text{ ssi } \forall q \geq p \exists r \geq q (\mathcal{K} \Vdash_r \varphi).$$

Esto muestra que forzar la doble negación de φ corresponde a que “densamente en el futuro” φ será forzada. Esto captura la idea de “inevitable” (mas no actual).

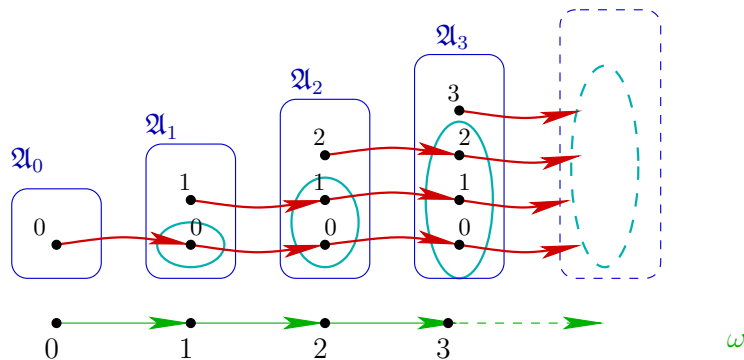
4. **Un par de ejemplos.** Primero, observe el modelo de Kripke siguiente: $\mathbb{P} = \{p < q\}$, $\mathfrak{A}_p = \{m\}$, $\mathfrak{A}_q = \{m, n\}$, $f_{pq}(m) = m$. Entonces

$$\mathcal{K} \Vdash_p \neg\neg(\exists x, y(x \neq y))$$

(pues aunque en tiempo p aún no hay objetos distintos, densamente en el futuro de p (es decir, en q) sí los hay). Sin embargo,

$$\mathcal{K} \not\Vdash_p \exists x, y(x \neq y).$$

Por otro lado, considere ahora el modelo de Kripke dado por $\mathbb{P} = \omega$ con el orden usual, $A_n = \{0, 1, \dots, n\}$, la estructura está dada por $\mathfrak{A}_n = (A_n, B^{\mathfrak{A}_n})$, donde B es un predicado monádico interpretado en \mathfrak{A}_n como $\{0, \dots, n-1\}$. Además, $f_{nm}(x) = x$ siempre que $n \leq m \in \omega$. El modelo de Kripke se ve así:



Es decir, un “universo en expansión” con una zona B que es siempre “casi todo” pero nunca todo. Como ejercicio, usted debe verificar con toda precisión que

$$\mathcal{K} \Vdash_0 \forall x \neg \neg B(x)$$

pero

$$\mathcal{K} \not\Vdash_0 \neg \neg \forall x B(x).$$

La idea intuitiva es que la primera fórmula es forzada, pues en todo futuro de 0 será cierto que todo objeto “entrará” en B (aunque en tiempo n , n mismo no ha entrado en B , en tiempo $n + 1$, n sí entra en B). Por otro lado, la segunda sentencia no es forzada en 0, pues de serlo tendría que suceder que “en algún futuro” (de 0) todo entra en B . Pero en ningún **momento** se tiene que B es todo el universo (siempre le falta un punto para serlo).

Una interpretación teológica de esto :) A puede ser el conjunto de seres humanos justos, B el conjunto de aquellos que han ido al cielo. En ningún momento (antes del Juicio Final) todos han ido al cielo. Sin embargo, la frase “todos los justos irán al cielo” vale en el modelo **dinámico**, pues todo justo entra al cielo en un momento dado. Sin embargo, no vale la frase (antes de Juicio Final) “en un momento dado, todos los justos estarán en el cielo”.

8. Leibniz: el proyecto lógico global

8.1. Notas iovinas

Leibniz (1646-1716) está absolutamente enmarcado por la cultura del **barroco**, y es preciso entenderlo desde ese punto de vista. Hizo aportes cruciales a la matemática (cálculo), la lógica (ya veremos), la metafísica, la jurisprudencia, etc.

Su primer escrito juvenil (1666) fue la *Dissertatio de Arte Combinatoria*. Esta rige las líneas de sostén de todo su enorme sistema posterior. Varias tradiciones confluyen en la combinatoria de Leibniz. Entre éstas, fuera del afán de síntesis del barroco, tenemos las tradiciones pitagórica y cabalística. Estas intentaban **cifrar** la complejidad del mundo a través de un cálculo (*ars combinatoria*) de combinaciones conceptuales elementales. Es entonces una ciencia general de las relaciones abstractas.

No era el primero. Antes, Raimon Llull (1235-1315) y Athanasius Kircher (1601-1680) habían construido mecanismos sofisticados para explicar y ordenar los ámbitos multiformes del conocimiento. Sin embargo, las “artes” de Llull y Kircher resultaron muy artificiales: su escogencia de dudosos conceptos “generales y simples” y las formas y números de la combinatoria la hicieron