Lema de amalgamación en el ejemplo Ab-initio. Notas para el seminario de teoría de modelos de Bogotá II-2005

Alexander Berenstein
Mario Andrés Velásquez

20 de octubre de 2005

Resumen

Se presenta una exposición del ejemplo Ab-initio. Se prueba el lema de amalgamación y se examina la estructura de los tipos.

1. Preeliminares

Sea $L = \{R\}$ una relación ternaria, simétrica (si $(x_1, x_2, x_3) \in R$ entonces para σ una permutación de $\{1, 2, 3\}$, $(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}) \in R$) y satisfecha sólo por elementos distintos. Sea $\mathfrak{M}$ una L-estructura, si $A \subseteq^{fin} \mathfrak{M}$, definimos $\delta(A) = |A| - |R \cap A^3|$.
Sea $\mathfrak{H}_n = \{\mathfrak{M} : \mathfrak{M}$ es una L-estructura, $\|\mathfrak{M}\| \geq n$ y $\delta(A) \geq n$ para $A \subseteq^{fin} \mathfrak{M}\}$

Definición 1. Sea $\mathfrak{M} \in \mathfrak{H}_0$ y sea $A \subseteq^{fin} \mathfrak{M}$. Decímos que A es autosuficiente en $\mathfrak{M}$ ($A \preceq \mathfrak{M}$) si para $B \supseteq^{fin} A$ con $\mathfrak{M} \supseteq B$ tenemos que $\delta(B) \geq \delta(A)$.

Proposición 2. Sea $A \subseteq^{fin} \mathfrak{M}$, existe un conjunto $\bar{A}$ tal que $\bar{A} \preceq \mathfrak{M}$ y cualquier otro B tal que $A \subseteq B \preceq \mathfrak{M}$, contiene a $\bar{A}$.

Demostración. Sea $\bar{A}$ un conjunto que contiene a A con $\delta(\bar{A})$ minimal. $\square$

Proposición 3. Si A es autosuficiente en B y B es autosuficiente en M, entonce A es autosuficiente en M. Además la intersección de dos conjuntos autosuficientes es autosuficientes.

Demostración. Sólo probaremos la primera afirmación. Sea C tal que $A \subseteq C \subseteq M$, C es finito. Ahora $A \subseteq C \cap B \subseteq B$, entonces $\delta(C \cap B) \geq \delta(A)$, pero $B \subseteq C \cup B$, entonces $\delta(C \cup B) \geq \delta(B)$, para este δ se tiene que $\delta(C) + \delta(B) \geq \delta(C \cup B) + \delta(C \cap B)$, de aquí se deduce que $\delta(A) \leq \delta(C)$ $\square$

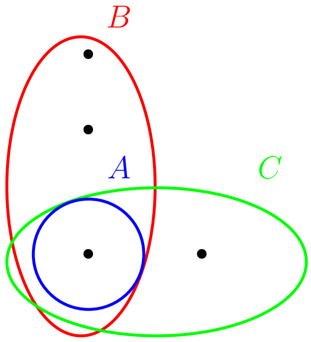
Definición 4. Decímos que A es n-autosuficiente en B ($A \preceq_n B$) si para $C \subseteq B$ con $A \subseteq C$ y $|C \setminus A| \leq n$, se tiene que $\delta(C) \geq \delta(A)$

Hecho 5. Si $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$, existe una fórmula de primer orden $\varphi(a_1, \ldots, x_k)$, tal que $A \preceq_n \mathfrak{M}$ si y sólo si $\mathfrak{M} \models \varphi(a_1, \ldots, x_k)$. Además la clase $\mathfrak{H}_n$ es elemental

Definición 6. Supongamos que $A \subseteq B, C$, sea $D = B \oplus_A C$ la estructura con universo $B \cup C$ obtenida al tomar B y C con intersecciés igual a A, y no agregar más nodos que los que ya estaban en B o en C (esto quiere decir que no hay relaciones entre elementos de B y C y no de A).

Lema 7. (Amalgamación) Si B y C están en $\mathfrak{H}_0$ ($\mathfrak{H}_n$), entonces $D \in \mathfrak{H}_0(\mathfrak{H}_n)$, además si $A \preceq_n B$ y $A \preceq C$, entonces $B \preceq D$ y $C \preceq_n D$; es decir tenemos el siguiente diagrama.

Observación. Antes de demostrar el lema queremos hacer referencia al artículo de Jonh Goode donde la definición de la clase $\mathfrak{H}_n$ no incluye la condición $|\mathfrak{M}| \geq n$ (se pide en cambio que $\delta(A) \geq n$ para $A \subseteq^{fin} \mathfrak{M}$ y $|A| \geq n$), pero se afirma un lema de amalgamación idéntico al anterior, vamos a mostrar un ejemplo en el cual D no está en $\mathfrak{H}_n$ a pesar de que B y C lo está. Sea R la relación ternaria en el plano 'ser colineales', sea B formado por tres puntos colineales, C formado por uno de estos puntos y otro que no es de B, es fácil ver que B y C están en $\mathfrak{H}_4$ (B y C tienen menos de 4 elementos), pero D no estará en $\mathfrak{H}_4$, pues $\delta(D) = 3$ y $|D| = 4$(ver la figura)



Demostración. Veamos que $D \in \mathfrak{H}_0$, sea $E \subseteq^{fin} D$, tenemos que $\delta(E) = \delta(E \cap C) + \delta(E \cap B) - \delta(E \cap A)$, pues no se agregan nuevas relaciones en D de las que ya había en C y B, ahora $A \subseteq (E \cap C) \cup A \subseteq C$, como $A \preceq C$, entonces $\delta(A) \leq \delta(E \cap C) + \delta(A) - \delta(E \cap A)$, es decir $0 \leq \delta(E \cap C) - \delta(E \cap A)$, pero como $B \in \mathfrak{H}_0$, entonces $\delta(E \cup B) \geq 0$, reuniendo estas dos desigualdades tenemos que $\delta(E) \geq 0$, es decir $D \in \mathfrak{H}_0$, para ver que $D \in \mathfrak{H}_n$ (si $B, C \in \mathfrak{H}_n$), tomamos $E \subseteq^{fin} D$, con $|E| \geq n$, consideramos tres casos:

1. $|E \cap B| \geq n$, como $A \preceq C$, $\delta(E \cap C) - \delta(E \cap A) \geq 0$, y como $B \in \mathfrak{H}_n$, $\delta(E \cap B) \geq n$, entonces $\delta(E) \geq n$

2. $|E \cap B| < n$ y $|E \cap C| \geq n$, como $A \preceq_n B$, $\delta(E \cap B) \geq \delta(A)$, y como $C \in \mathfrak{H}_n$, $\delta(C) \geq n$, por lo tanto $\delta(E) \geq n$

3. $|E \cap B| < n$ y $|E \cap C| < n$, sabemos que $|C|, |B| \geq n$, sea $F \subseteq C$ tal que $|F \cup (E \cap C)| = n$, como $C \in \mathfrak{H}_n$, $\delta(F \cup (E \cap C)) = n$, pero como $|F \cup (E \cap C)| = n$ se debe tener que $|R \cup (F \cup (E \cap C))^3| = 0$, lo cual implica que $|R \cup (E \cap C)| = 0$, es decir $\delta(E \cap C) = |E \cap C|$, de manera análoga se puede probar que $\delta(E \cap B) = |E \cap B|$, de esto se deduce que $\delta(E) = |E| \geq n$.

Al final tenemos que $D \in \mathfrak{H}_n$. Para ver que $B \preceq D$ sea E tal que $B \subseteq E \subseteq^{fin} D$, tenemos que $\delta(E) = \delta(B) + \delta(E \cap C) - \delta(E \cap A)$, pero como $A \preceq C$, $\delta(E \cap C) - \delta(E \cap A) \geq 0$, entonces $\delta(E) \geq \delta(B)$. Por ultimo nos falta ver que $C \preceq_n D$, sea E tal que $C \subseteq E \subseteq^{fin} D$ c0on $|E \setminus C| \leq n$, tenemos que $A \subseteq E \cup B$, pero $|(E \cap B) \setminus A| = |E \setminus C| \leq n$, como $A \preceq_n B$, $\delta(E \cup B) \geq \delta(A)$, por lo tanto como $\delta(E) = \delta(E \cap B) - \delta(A) + \delta(C)$, se tiene que $\delta(E) \geq \delta(C)$. $\square$

Consideramos la teoría T que resulta de adicionar a $\mathfrak{H}_0$ ($\mathfrak{H}_n$) los siguientes axiomas: si A y B son finitos y $A \preceq B$ y $A \preceq_n \mathfrak{M}$, entonces existe $B' \equiv_A B$ y $B' \preceq_n \mathfrak{M}$.
Veamos que T es consistente: construimos un modelo de T como un límite de una cadena ascendente de estructuras finitas $\mathfrak{M}_p$, para construir $\mathfrak{M}_{p+1}$, sea $A \subseteq \mathfrak{M}$ y $A \preceq B$, tomamos $\mathfrak{M}_{p+1} = \mathfrak{M}_p \oplus_A B$, y sea $\mathfrak{M} = \cup_p \mathfrak{M}_p$.

T resulta completa: Sean T_1 y T_2 dos complecciones de T, y $\mathfrak{M}_i \models T_i$ ω-saturado, como cada uno de estos modelos satisface T, si $A \subseteq^{fin} \mathfrak{M}_i$ y $A \preceq \mathfrak{M}$ y $A \preceq B$, entonces B puede ser inmerso autosuficientemente en $\mathfrak{M}$ sobre A. Sea $A \preceq \mathfrak{M}_1$ con A finito, tenemos que $\emptyset \preceq A$, existe $A' \preceq \mathfrak{M}_2$ con $\emptyset \preceq A'$. Además si $A' \preceq B' \preceq \mathfrak{M}_2$, entonces existe $B \preceq \mathfrak{M}_1$ tal que $A \preceq B \preceq \mathfrak{M}_1$, continuando este proceso podemos probar que existe un sistema de isomorfismos parciales de $\mathfrak{M}_1$ en $\mathfrak{M}_2$, por lo tanto $\mathfrak{M}_1 \equiv \mathfrak{M}_2$, por lo tanto $T_1 = T_2$, es decir T es completa.

Si revisamos lo hecho en el último parrafo en realidad tambien hemos probado que si $\mathfrak{M} \models T$, $\mathfrak{M}$ es ω-saturado y sean $A_i \subseteq^{fin} \mathfrak{M}$ $(i = 1, 2)$, supongamos que $qftp(\bar{A}_1) = qftp(\bar{A}_2)$ (tipo libre de cuantificadores), entonces existe un sistema de isomorfismos parciales que envía $\bar{A}_1$ en $\bar{A}_2$, por lo tanto $tp(\bar{A}_1) = tp(\bar{A}_2)$, podemos concluir entonces que $tp(\bar{A}$ está determinado por $qftp(\bar{A})$.

Vamos a calcular ahora el rango del tipo de un elemento a sobre A: tenemos que $MR(tp(a/A)) = MR(tp(a/\bar{A})$ pues $\bar{A} \subseteq acl(A)$, podemos asumir entonces que $A = \bar{A}$, consideramos dos casos:

1. $\delta(\overline{A \cup \{a\}}) = \delta(\bar{A})$.

   Sea $B_0 \subseteq B_1 \subseteq \ldots \subseteq B_{n+1}$ una cadena maximal con $\delta(B_0) = \delta(B_1) = \ldots = \delta(B_n)$; $B_0 = A$; $B_{n+1} = \overline{A \cup \{a\}}$, vamos a analizar $tp(B_1/A)$. Sea $C \supseteq A$; si $B_1 \subseteq \bar{C}$, entonces $tp(B_1/C)$ es algebraico; si $B_1 \not\supseteq \bar{C}$ existe $b \in B_1 \setminus \bar{C}$, logramos lo siguiente

   a) $B_1 \cap \bar{C} = A$, si no fuera así, sea $d \in (B_1 \cup \bar{C}) \setminus A$. $A \subsetneq A \cup \{d\} \subsetneq B_1$, entonces d está relacionado con puntos de $B_1 \setminus A$: en este caso hay más relaciones con elementos de $B_1 \setminus (A \cup \{d\}$ que puntos en $B_1 \setminus (A \cup \{d\})$, esto implica que $\delta(B_1 \cup \bar{C}) < \delta(\bar{C})$ lo cual es imposible.

   b) No hay más relaciones entre B_1 y C que en la unión libre, $\delta(\bar{C} \oplus_A B_1) = \delta(\bar{C}) + \delta(B) - \delta(A) = \delta(\bar{C})$, si hubiera más relaciones $\delta(\bar{C} \cup B) < \delta(\bar{C})$.

   Un argumento análogo prueba que $U(tp(B_1/A)) = 1, \ldots, U(tp(B_{n+1}/B_n)) = 1$ y entonces $U(tp(B_{n+1}/A)) = n + 1$. Además en este caso $MR(\_) = U(\_)$, entonces $RM(x = x) \geq n$ para todo n, entonces $RM(x = x) = \omega$.

2. $\delta(\overline{A \cup \{a\}}) = \delta(A) + 1$

   En este caso no hay relaciones entre a y A, pues si las hubiera $\delta(A \cup \{a\}) < \delta(A) + 1$. Consideremos a y b con $\delta(A \cup \{a\}) = \delta(A \cup \{b\}) = \delta(A) + 1$, entonces $qftp(a/A) = qftp(b/A)$ esto implica que $tp(a/A) = tp(b/A)$, todo elemento a con la propiedad $\delta(\overline{A \cup \{a\}}) = \delta(A) + 1$