Ziegler: el amalgama primordial de Hrushovski

Traducción de Andrés Villaveces

Agosto 2005

Resumen

Notas de seminario sobre la fusión original de Hrushovski (Freiburg, mayo de 2005)

1. El lema principal

Consideramos estructuras con un predicado ternario R y definimos, para A finito

$$\delta(A) = |A| - |R(A)|$$

y

$$\delta(A/M) = \delta(A \cup B) - \delta(B)$$

para B suficientemente grande tal que $A \cap M \subset B \subset M$.

$B \subset M$ es *clausurado* en M si $\delta(A/B) \geq 0$ para todo $A \subset M$[1]. Denotamos esto mediante $B \leq M$. También decimos que que M/A es *fuerte*. $\mathcal{C}^0$ es la clase de todos los M tales que $\emptyset \leq M$.

Dado un subconjunto finito B de $M \in \mathcal{C}^0$, definimos

$$d(B) = \text{mín}\{\delta(A) | B \subset A \subset M\}.$$

d es la función dimensión de una pregeometría.

Una extensión fuerte propia $M \leq N$ es *minimal* si no hay dos extensiones fuertes propias $M \leq M'$ y $M' \leq N$.

Lemma 1.1 *Sea N/M minimal, y $\delta(N/M) > 0$. Entonces $\delta(N/M) = 1$ y $N = M \cup \{n\}$ para algún n que no está relacionado con ningún elemento de M.*

[1] Ojo: también se dice 'autosuficiente'.

Definition 1.2 *Un par (A, B) es bueno si*

1. $B \cup A \in \mathcal{C}^0$
2. $A \cup B = \emptyset$
3. $B \cup A/B$ *es minimal*
4. $\delta(a/n) = 0$

Se dice que (A, B) es muy bueno si no existe ningún sunconjunto propio B'de B tal que el par (A, B') sea bueno.

Si (A, B) es muy bueno, entonces todo $b \in B$ está en relación con algún elemento de A (y elementos de $B \cup A$). Si (A, B) es bueno, existe un $B' \subset B$ determinado de manera única para el cual (A, B') es muy bueno: B' es el conjunto de todos los $b \in B$ que están relacionados con algún elemento de A (y elementos de $B \cup A$). Decimos que B' es la *base* de A/B. Se tiene que $|B'| \leq 2 \cdot |A|$.

Un *código* α es un tipo de isomorfía de un par muy bueno (A_α, B_α). Una *pseudosucesión de Morley* de α sobre B es un conjunto de A_i's dos a dos disyuntos tales que $(A_i, B) \approx (A_\alpha, B_\alpha)$.

Para cada código[2] α, fijamos un número $\mu(\alpha) \geq \delta(B_\alpha)$. (NAV: jugará el rol de multiplicidad.)

Definition 1.3 *$calC^\mu$ es la clase de todos los M de $\mathcal{C}^0$ tales que todo α sobre un $B \subset M$ arbitrario tiene pseudosucesiones de Morley de longitud a lo sumo $\mu(\alpha)$.*

Lemma 1.4 *Sean $M \in \mathcal{C}^\mu$ y a no relacionado con M. Entonces $M \cup \{a\} \in \mathcal{C}^\mu$.*

Lemma 1.5 (Lema principal). *Sean $M \in \mathcal{C}^\mu$ y (A, M) un par bueno, con base B. Entonces $M' = M \cup A \in \mathcal{C}^\mu$, y una de las dos situaciones siguientes se tiene:*

1. *El tipo α de (A, B) tiene una pseudosucesión de Morley en M de longitud $\mu(\alpha)$.*

[2] ¡Ojo!

2. *Existen un $B' \subset M'$, no contenido en M, y un código α', que tiene una pseudosucesión de Morley (A'_i) sobre B' en M', de longitud $\mu(\alpha') + 1$. Por ende,*

   a) *Ningún A'_i está contenido en $M \setminus B$.*

   b) *Algún A'_i está contenido en A.*

   c) *$B' \subset B \cup A$.*

Demostración Es claro que M' no puede estar en $\mathcal{C}^\mu$ si ninguno de los dos casos tiene lugar. Suponemos por lo tanto que M' no está en $\mathcal{C}^\mu$. Entonces existe un α' con una pseudosucesión de Morley A'_i sobre algún B' en M' que es demasiado larga. Miramos dos casos:

Caso: $B' \subset M$**.** Como $M \in \mathcal{C}^\mu$, alguno de los A'_i no está contenido en M. Si A'_i no estuviera contenido[3] en A, se tendría por la minimalidad de A'_i/B' que $\delta(A'_i/M) < 0$, lo cual contradiría que $M \leq M'$. Por lo tanto $A'_i \subset A$. Ahora bien, $\delta(A'_i/M) = 0$, lo cual implica por la minimalidad de A/M que $A'_i = A$. Se sigue que $B' = B$ y que $\alpha' = \alpha$. Así, α tiene una pseudosucesión de Morley sobre B en M de longitud $\mu(\alpha)$.

Caso: $B' \not\subset M$**.** Si para algún i se tuviera que $A'_i \subset M \setminus B$, A'_i no podría estar relacionado con los puntos de $B' \setminus M$. Por lo tanto se tiene $2(a)$. Supongamos que los primeros $A'_1, \ldots, A'_k$ están contenidos en M y los siguientes $A'_{k+1}, \ldots, A'_{k+l}$ no están contenidos ni en M ni en A. Como todos los A'_i están relacionados con los puntos de $B' \setminus M$, se sigue que[4]

$$\delta(B'/M) \leq \delta(B'/M \cap B') - k \leq \delta(B') - k.$$

Por lo tanto, usando de nuevo la minimalidad de los A'_i/B', se tiene que

$$\delta(A'_i/M \cup B' \cup A'_{k+1} \cup \cdots \cup A'_{i-1}) < 0$$

para todo $i = k+1, \ldots, k+l$. Se sigue que

$$\delta(\bigcup_{i=k+1}^{k+l} A'_i/M \cup B') \leq -l.$$

[3]¡Ojo! Nicht ganz in A

[4]Ojo: como $\delta(M \cap B') \geq 0$, $\delta(B'/M \cap B') \leq \delta(B')$.

Por lo tanto,

$$0 \leq \delta(\bigcup_{i=k+1}^{k+l} A'_i \cup B'/M) \leq \delta(B'/M) - l \leq \delta(B') - (k+l).$$

Hay a lo sumo $\delta(B')$ elementos de A'_i por fuera de A. De aquí se sigue $2(b)$. Como los elementos de A no están relacionados con los puntos de $B' \setminus (B \cup A)$, se tiene $2(c)$.

□

2. La teoría T^μ

Corollary 2.1 *$\mathcal{C}^\mu$ tiene la propiedad de amalgamación para inmersiones fuertes*[5]*.*

Demostración Sean $N \leq M \in \mathcal{C}^\mu$, $N \leq N' \in \mathcal{C}^\mu$. Buscamos un $M \leq M' \in \mathcal{C}^\mu$ y una inmersión fuerte $N' \to M'$ sobre N. Podemos suponer que N'/N es minimal (!). El caso $\delta(N'/N) > 0$ es claro por el lema1.1. Corresponde a $N' = N \cup \{a\}$, para algún a no relacionado con N. Sea entonces $M' = M \cup \{a\}$, pues a no está relacionado con M. Así solo nos toca mirar el caso $N' = N \cup A$, pues (A, N) es bueno.

Caso 1: la unión (libre) $M' = M \cup A$ pertenece a $\mathcal{C}^\mu$. Entonces ya tenemos el resultado, pues $M \leq M'$ y $N' \leq M'$.

Caso 2: $M' = M \cup A \notin \mathcal{C}^\mu$. Entonces estamos en uno de los dos casos del lema1.5.

Como la base B de A/M está contenida en N, no puede tener lugar el caso 2 del lema: los A'_i no están contenidos en $M \setminus N = M' \setminus N'$ y por lo tanto, como $B' \subset N' \leq M'$, y A'_i/B' es minimal, están contenidos en N'. Se seguiría que $N' \notin \mathcal{C}^\mu$.

Así, el tipo α de (A, B) tiene una pseudosucesión de Morley (A_i) en M, de longitud $\mu(\alpha)$. Los A_i no pueden estar todos contenidos en N, pues $N' \in \mathcal{C}^\mu$. Por lo tanto algún A_i está contenido en $M \setminus N$. Se sigue que $N \cup A_i \leq M$. El isomorfismo entre $B \cup A$ y $B \cup A$ se extiende trivialmente a un isomorfismo $N' \to N \cup A_i$ sobre N.

[5] hat bezüglich starker Einbettungen die Amalgamationseigenschaft...

$\square$

Definition 2.2 *Un $M \in \mathcal{C}^\mu$ es rico si para todo $B \leq M$ finito y todo $B \leq C \in \mathcal{C}^\mu$, existe una inmersión fuerte $C \to M$ sobre B.*

Por la conclusión anterior se desprende inmediatamente la existencia de una estructura bien definida rica contable K^μ.

Denotamos mediante F_n la estructura con n elementos y $\delta(F_n) = n$, es decir, sin relaciones. $F_n \leq M$ significa que los elementos de F_n son d-independientes en M. Es claro que F_n pertenece a $\mathcal{C}^\mu$.

Definition 2.3 *M es un modelo de la teoría T^μ si*

1. *$M \in \mathcal{C}^\mu$.*
2. *Si (A, M) es bueno, entonces $M \cup A \notin \mathcal{C}^\mu$.*
3. *Para cada n, F_n está fuertemente inmerso en alguna extensión elemental de M.*

Corollary 2.4 *T^μ es en efecto una teoría elemental.*

Demostración Es fácil ver que para todo α la propiedad *No hay $B \subset M$ tal que M contenga una pseudosucesión de Morley de α sobre B de longitud* $\mu(\alpha) + 1$ se puede expresar mediante una fórmula elemental.

Para todo α debemos expresar (mediante una fórmula): si (A/M) es bueno, con una base $B \subset M$ para la cual (A, B) es de tipo α, entonces $M' = M \cup A \notin \mathcal{C}^\mu$. Esto es posible si tan solo para una cantidad finita de tipos α' debemos acortar las longitudes de las pseudosucesiones de Morley en M'. Esto se sigue del Lema 1.5: para el α' de ese lema se tiene que $|A_{\alpha'}| \leq |A|$ y $|B_{\alpha'}| \leq |B \cup A|$. $\square$

Theorem 2.5 *M es rico ssi M es un modelo ω-saturado de T^μ.*

Demostración Sea K rico. Es claro que K satisface los axiomas (1) y (3). Sea (A, K) un par bueno y sea $K \cup A \in \mathcal{C}^\mu$. Escoja un $C_0 \leq K$ finito, que contenga la base B de A/K y una copia A_0 de A sobre C_0 con $C_1 = C_0 \cup A_0 \leq K$. Continuando de esa manera, se obtiene en K una pseudosucesión de Morley infinita de α sobre B. Contradicción. Así, también se tiene (2). Demostramos después que K es ω-saturado.

Sea ahora $M \models T^\mu$ ω-saturado, $B \leq M$ y $B \leq C \in \mathcal{C}^\mu$. Podemos suponer que C/B es minimal. Dividimos en dos casos:

1. $\delta(C/B) > 0$. Entonces $C = B \cup \{a\}$ para algún a que no está relacionado con B. Por el axioma (3) y la ω-saturación se tiene que $d(M) = \infty$. También hay un $a' \in M$ con $d(a'/B) = 1$. Por lo tanto, a' no está relacionado con B y $B \cup \{a'\} \leq M$. Esto da la inmersión fuerte que buscábamos de C en M.

2. $C = B \cup A$ para algún par bueno (A, B). Como $M \cup A$ no pertenece a $\mathcal{C}^\mu$, pero C y M están amalgamados fuertemente en $\mathcal{C}^\mu$, $B \cup A$ está sumergido fuertemente en M sobre B (ver demostración del Corolario 2.1).

Como M y K son parcialmente isomorfos, también K es ω-saturado. $\square$

Corollary 2.6 *T^μ es la teoría completa de K^μ.*

Demostración Todo modelo saturado de T^μ es parcialmente isomorfo a K^μ. $\square$